Київський національний університет імені Тараса Шевченка

# *Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України*

## IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики

## LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

## Умови та вказівки до розв’язань задач

## *1 тур*

*~~17 березня~~ 20 липня 2020 року*

*"Мозок – чудовий орган.*
*Він починає працювати з того моменту,*
*як ти прокинувся, і не зупиняється,*
*доки ти не прийшов на олімпіаду."*
*Закон Мерфі*

*м. ~~Миколаїв~~ Київ*

# 8 клас

**8–1.** Яку найменшу кількість чисел можна викреслити серед перших $100$ натуральних чисел, щоб добуток решти чисел не ділився націло на $250$?

***Відповідь:*** $18$.

***Розв'язання.*** Оскільки $250=2\cdot5^3$, то викреслимо з добутку $1\cdot2\cdot\ldots\cdot100$ усі числа, що кратні $5$ окрім деяких двох, що не кратні $25$, наприклад, залишимо $5$ та $10$. Шукане число задовольняє умову, бо не ділиться на $5^3$, а тому й на $125$. При цьому викреслені були $18$ чисел, оскільки серед множників $1, 2, \ldots, 100$ рівно $20$ кратні $5$.

Припустимо, що ми викреслили не більше $17$ чисел. Тоді серед $20$ чисел, що кратні $5$, не викреслені принаймні $3$ різні, а тому добуток, що лишився кратний $5^3$. Щоб воно не ділилося на $250$, там не має бути парних чисел. Але серед принаймні $83$, що лишилися, очевидно, що парні є, бо непарних усього $50$. Таким чином одержана суперечність завершує розв'язання.

**8–2.** Вісім незнайомих один з одним дітей прийшли на перше заняття з танців. Щоб вони якнайшвидше познайомилися, вчителька вирішила по черзі вибирати деяких чотирьох з них, які під мелодію водитимуть хоровод протягом хвилини. За цю хвилину кожна дитина в хороводі знайомиться з тими двома, з якими тримається за руку. Яка найменша кількість часу (хвилин) знадобиться вчительці, щоб познайомити один з одним усіх $8$ дітей?

*(Ніколаєв Арсеній)*

***Відповідь:*** $8$.

***Розв'язання.*** Виберемо деяку дитину з цих $8$. Йому треба познайомитися з $7$ іншими, а кожному хороводі, де він прийматиме участь, додає йому максимум $2$ знайомства з іншими. Тому він має брати участь принаймні у $4$ хороводах. Аналогічно це все стосується кожної дитини припустимо, що за кожний хоровод дитина отримає цукерку. Таким чином кожна дитина має отримати принаймні $4$ цукерки, тому усього їх мали роздати не менше ніж $8\cdot4=32$ цукерки. З іншого боку, за кожний хоровод роздається не більше ніж $4$ цукерки, тому й хороводів мало бути не менше $8$.

Залишається навести приклад з $8$ хороводів, коли усі діти перезнайомляться відповідно до заданих умов. $1234$, $5678$, $1357$, $2468$, $1526$, $3748$, $2736$ та $1845$. Тут, зрозуміло, що перший тримає за руку останнього.

**8–3.** ***а)*** Відомо, що для ненульових цілих чисел $a, b, c$ справджується умова: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}$. Чи обов'язково має справджуватися рівність: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$?

***б)*** Розглянемо усі трійки ненульових цілих чисел $(a, b, c)$, кожне з яких знаходиться в межах від $-2020$ до $2020$ включно. З'ясуйте, для скількох з них умови $a+b+c=0$ та $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ рівносильні, тобто для скількох таких трійок чисел $(a, b, c)$ ці твердження справджуються чи не справджуються одночасно?

*(Рубльов Богдан)*

***Відповідь:*** ***а)*** не обов'язково, ***б)*** $4040\cdot 4039\cdot 4038+3\cdot 1010$.

***Розв'язання.*** Зробимо такі перетворення:

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)-\left(\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)=\frac{a^3c-a^3b+b^3a-a^3b+c^3b-b^3c}{abc}.$$

Далі перетворимо лише чисельник:

$$a^3c-a^3b+b^3a-a^3b+c^3b-b^3c=(b-a)(ab^2+a^2b+c^3-ca^2-abc-cb^2)=$$
$$=(b-a)(ab^2+a^2b+c^3-ca^2-abc-cb^2)=(b-a)(a-c)(b^2+ab-c^2-ca)=$$
$$=(b-a)(a-c)(b-c)(a+b+c).$$

Таким чином умова $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ для ненульових чисел $a, b, c$ рівносильна умові: $(b-a)(a-c)(b-c)(a+b+c)=0$.

***а)*** Тепер аналогічно зробимо перетворення такого виразу:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=\frac{a^2c-a^2b+b^2a-a^2b+c^2b-b^2c}{abc}=\frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{abc}=0.$$

Ідея пошуку прикладу очевидно має базуватися на попередньому пункті, бо це стає можливим за умови $a+b+c=0$. Підберемо, наприклад, такі числа: $a=1, b=2, c=-3$, тоді зрозуміло, що перша рівність справджується, а стосовно другої маємо, що вона спростовується:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{1}=\frac{3-4+18}{6}=\frac{17}{6},\ \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+\frac{2}{1}=\frac{-2+9+12}{6}=\frac{19}{6}.$$

***б)*** Із зроблених перетворень бачимо, що ці умови рівносильні у двох випадках.

Випадок 1. Числа $a, b, c$ є попарно різними.

Випадок 2. Якщо там є принаймні два рівних, наприклад, $a=b\neq c$, то друга рівність очевидно справджується, а перша – справджується за умови, що $c=-(a+b)$.

Залишається порахувати шукану кількість. Якщо усі попарно різні, то таких варіантів буде $4040\cdot 4039\cdot 4038$. Тепер варіант, коли два рівних, а третє – дорівнює сумі цих двох з протилежним знаком. Тут маємо, що якщо $a=b\neq c$, то для вибору $a$ є $1010$ варіантів, а вибір $b$ та $c$ однозначний. Тому усього таких трійок чисел $3\cdot 1010$.

**8–4.** В трикутнику $ABC$ $\angle A=75°$ та $\angle C=45°$. На сторонах $AB$ та $BC$ вибрали точки $P$ та $T$ відповідно так, що чотирикутник $APTC$ вписаний і $CT=2AP$. Точка $O$ – центр описаного кола $\Delta ABC$. Промінь $TO$ перетинає сторону $AC$ у точці $K$. Доведіть, що $TO=OK$.

*(Тригуб Антон)*

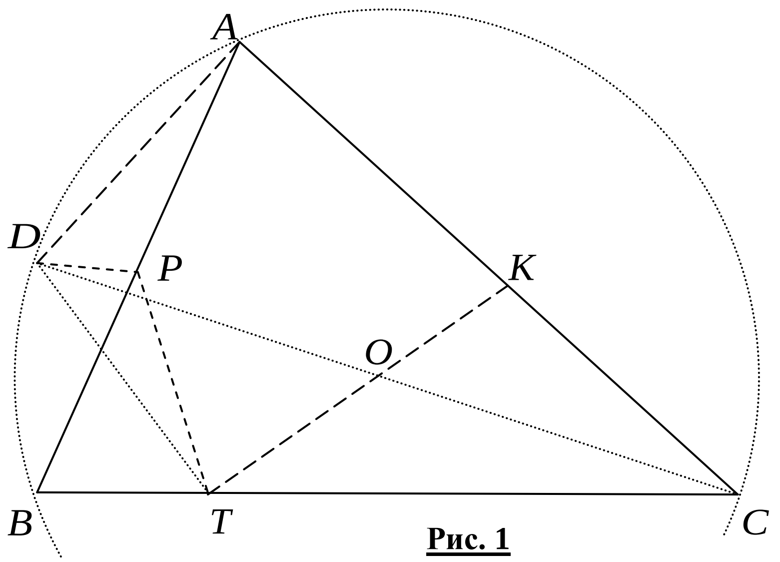


**Рис. 1**

***Розв'язання.*** Проведемо діаметр $CD$ описаного кола $\Delta ABC$. Тоді $\Delta ADC$ – прямокутний з кутом $60°$. Таким чином, $CD=2AD$ (рис. 1). Звідси $\Delta DTC\sim\Delta DPA$ за відношенням двох сторін та кутом між ними. Таким чином, $\angle BPD=\angle BTD$, звідки чотирикутник $PDBT$ вписаний. Помітимо що

$$\angle BTD = \angle BPD = \angle DPT - \angle BPT = 180^\circ - \angle DBT - 45^\circ = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

звідки $DT \parallel AC$. Оскільки $DO = OC$ та $DT \parallel CK$, то $DTCK$ – паралелограм, звідки $TO = OK$.

## 9 клас

**9–1.** Яку найбільшу кількість чисел можна вибрати серед чисел $1, 2, \ldots, 2n$ таким чином, щоб довільні два з них мали спільний дільник, більший за $1$?

*(Ніколаєв Арсеній)*

***Відповідь:*** $n$.

***Розв'язання.*** Випишемо усі парні числа. Очевидно, що вони умову задовольняють.

Тепер розглянемо такі пар чисел: $(1, 2)$, $(3, 4)$, …, $(2n-1, 2n)$. У кожній парі числа взаємно прості. А тому з них до шуканого набору можна вибрати не більше одного, тому більшої ніж $n$ кількості чисел вибрати не можливо.

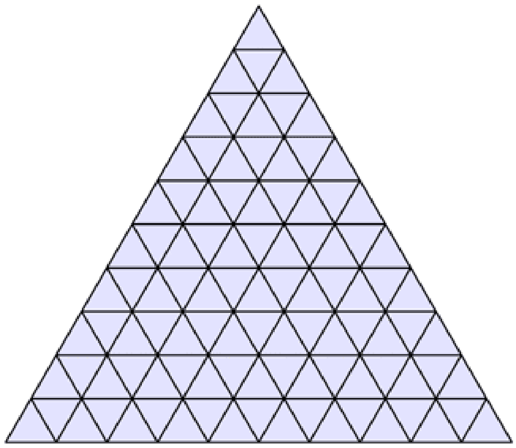

**Рис. 2**

**9–2.** Рівносторонній трикутник зі стороною $n$ поділено на $n^2$ маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною довжини $1$ (рис. 2). З самого початку один з них, що не має спільних точок з зовнішніми сторонами великого трикутника, пофарбували у синій колір, а решту – у жовтий. За один хід можна вибрати будь-який з $n^2$ маленьких трикутників і поміняти його колір та кольори сусідніх з ним по стороні трикутників (з синього на жовтий і навпаки). Чи можна за декілька ходів зробити усю дошку однокольоровою?

*(Ніколаєв Арсеній)*

***Відповідь:*** ні.

***Розв'язання.*** Розглянемо кількість пар сусідніх по стороні різнокольорових трикутників. Перевіримо, що парність цієї кількості є інваріант (рис. 3). Розглянемо задане перетворення. Якщо вибраний трикутник не межує стороною з зовнішньою межею великого трикутника, то перефарбовуються усього $4$ трикутники, якщо межує однією стороною, то $3$ трикутники, і якщо кутовий – $2$ трикутники. Подальші міркування однакові для кожного з випадків. Вибраний трикутник розташований всередині перефарбовуваної групи не змінює кількості таких пар, бо усі ці трикутники змінюють окрас. Кожний з зовнішніх трикутників перефарбування має дві сторони, що межують з іншими. Якщо обидві сторони були між трикутниками різного кольору, то стануть між однакового, і навпаки. Якщо одна була між різного, а інша сторона між однаковими, то все так і лишиться, з зміною ролей сторін. Таким чином проголошена парність і є інваріантом.

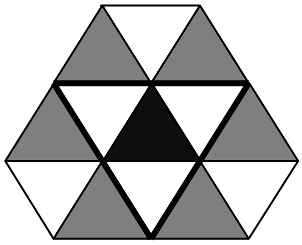

**Рис. 3**

З самого початку ми маємо, що кількість таких пар дорівнює $3$, а наприкінці – $0$. Таким чином шукане перетворення не можливе.

**9–3.** Доведіть, що для будь-якого натурального $n > 1$ існує послідовність натуральних чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m = n$, $m > 1$ така, що

$$5(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2) - 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{m-1}a_m) \le 4n^2 + \tfrac{1}{2}(m+1).$$

*(Сердюк Назар)*

***Розв'язання.*** Перепишемо задану нерівність таким чином:

$$(a_m - 2a_{m-1})^2 + \ldots + (a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2 \le \tfrac{1}{2}(m+1).$$

Побудуємо послідовність $(b_n)$ таким чином: $b_1 = n$, якщо $b_i$ – парне, то $b_{i+1}$ дорівнює $\frac{1}{2}b_i$, а якщо $b_i$ – непарне, то воно дорівнює тому з двох чисел $\frac{1}{2}(b_i+1)$ чи $\frac{1}{2}(b_i-1)$, яке є парним.

За побудовою існує таке $k$, для якого $b_k = 1$. Оберемо найменше значення $k$, для якого таке відбулося. Покладемо $a_{k-i+1} = b_i$, $i = \overline{1, k}$. Тоді серед доданків $(a_{i+1} - 2a_i)^2$ будуть або нулі, або одиниці. При цьому за побудовою, не зустрінеться двох одиниць поспіль, бо ми обираємо парне число з двох можливих. А це гарантує наступним нуль. Усього доданків $k$, тому

$$(a_k - 2a_{k-1})^2 + \ldots + (a_2 - 2a_1)^2 + a_1^2 \le \tfrac{1}{2}(k+1),$$

що й треба було довести.

**9–4.** У трикутнику $ABC$ ортоцентр $H$ – це середина висоти $AD$, $O$ – центр описаного кола $\Delta ABC$. Пряма, що проходить через точку $H$ перпендикулярно до прямої $HO$ перетинає сторони $AB$ та $AC$ $\Delta ABC$ у точках $P$ та $Q$ відповідно. Доведіть, що середини відрізків $BP$, $CQ$ та точка $O$ лежать на одній прямій.

*(Сердюк Назар)*

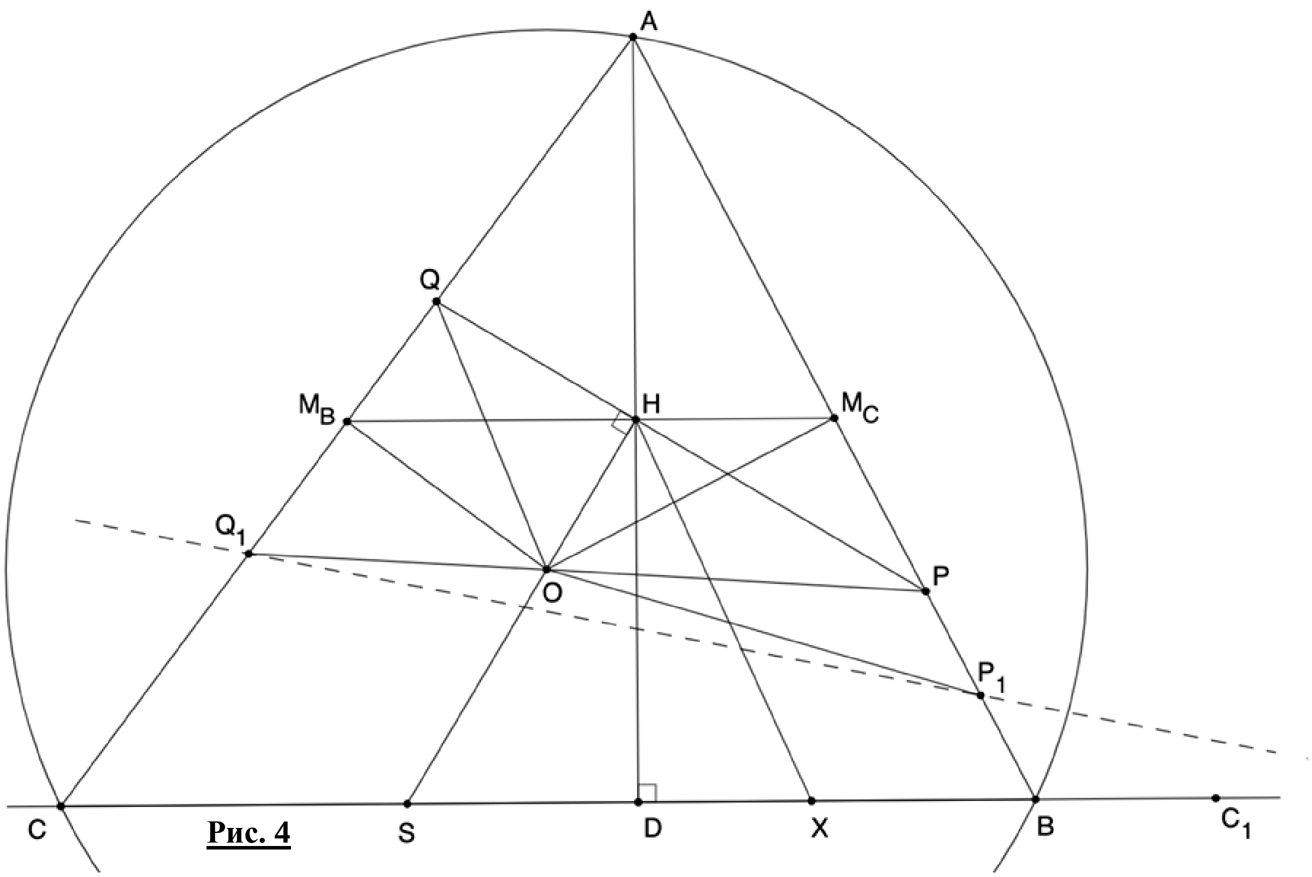


**Рис. 4**

***Розв'язання.*** Нехай $M_C$ та $M_B$ – середини сторін $AB$ та $AC$ відповідно. Тоді точка $H$ за умовою лежить на відрізку $M_BM_C$. Помітимо також, що проекції точки $O$ на прямі $AB$, $AC$ та $PQ$ – точки $M_C$, $M_B$ та $H$ лежать на прямій Сімпсона (рис. 4). Звідси випливає, що точка $O$ лежить на описаному колі $\Delta PAQ$.

Перетнемо промінь $HO$ з прямою $BC$ у точці $S$. Помітимо, що $\Delta OM_BM_C \sim \Delta HBC$ за рівними кутами. Відмітимо, що $\angle OHM_B = \angle HSB$, тому $S$ та $H$ є відповідними точками в подібних

трикутниках. Оскільки $BC = 2M_B M_C$, то $SC = 2M_C H = BD$. Отже точки $S$ та $D$ симетричні відносно середина сторони $BC$.
Позначимо середини $BP$ та $CQ$ через $P_1$ та $Q_1$ відповідно. Нехай також точка $C_1$ – симетрична точці $C$ відносно точки $D$. Далі отримаємо, що

$$\angle OQC = \angle OHM_B = \angle OSC_1 = \angle HSC_1 \text{ та } \angle OCA = 90° - \angle B = \angle HCB = \angle HC_1S.$$

Звідси випливає, що $\Delta HSC_1 \sim \Delta OQC$. Нехай $X$ – середина $SC_1$. Оскільки $C_1D = DC = BS$, то середина $SC_1$ співпадає з серединою $BD$, отже $X$ – середина $BD$. З наведеної подібності трикутників $\Delta HSC_1 \sim \Delta OQC$ тепер отримуємо $\angle OQ_1A = \angle HXS$ (кут між медіаною і стороною) і $\angle OQ_1A = \angle HXS = \angle B$ (середня лінія). Аналогічно $\angle OP_1A = \angle C$. З суми кутів трикутника $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ отримуємо, що точки $P_1$, $O$ та $Q_1$ лежать на одній прямій.

## 10 клас

**10–1.** Для яких натуральних чисел $n$ число $n^n + 1$ ділиться націло на число $n+1$?

***<u>Відповідь</u>:*** для усіх непарних $n$.
***<u>Розв'язання</u>.*** Для непарних $n$ достатньо розкласти на множники відповідну суму:

$$n^n + 1 = (n+1)(n^{n-1} - n^{n-2} + n^{n-3} - \ldots + 1).$$

Припустимо, що для деякого парного $n = 2k$ число $K = (2k)^{2k} + 1$ ділиться націло на $2k+1$. Тоді на $2k+1$ має ділитися й число $2kK = (2k)^{2k+1} + 2k = ((2k)^{2k+1} + 1) + (2k-1)$.
Оскільки $(2k)^{2k+1} + 1 = (2k+1)((2k)^{2k} - (2k)^{2k-1} + (2k)^{2k-2} - \ldots + 1)$, то на $2k+1$ також має ділиться і число $2k-1$, що, очевидно, не можливо. Таким чином для парних $n$ це не справджується.

**10–2. Задача 9–2**.

**10–3.** Нехай $H_a, H_b, H_c$ – основи висот, що опущені з відповідних вершин трикутника $ABC$, $H$ – ортоцентр цього трикутника, а $K$ – точка, що симетрична $H$ відносно прямої $BC$. Пряма, що проходить через точку $H$ паралельно прямій $H_bH_c$, перетинає прямі $AB$ та $AC$ у точках $X$ та $Y$. Доведіть, що описані кола $\Delta ABC$ та $\Delta XYK$ дотикаються.

*(Бондаренко Михайло)*

***<u>Розв'язання</u>.*** Розглянемо такі позначення: $M$ та $N$ – точки, що симетричні $H$ відносно прямих $AB$ та $AC$ відповідно, $S$ та $L$ – середини відрізків $XH$ та $HY$ відповідно (рис. 5). Доведення проведемо в декілька кроків.

1. Покажемо, що точки $H_c, S, H_a$ – колінеарні.
Це випливає з того, що

$$\angle SH_cH = \angle SHH_c = \angle HH_cH_b = \angle H_bBC = \angle HBH_a = \angle HH_cH_a,$$

де перша рівність витікає з того, що $S$ середина гіпотенузи прямокутного $\Delta XH_cH$, друга – з паралельності $XY \parallel H_cH_b$, а інші з вписаності чотирикутників $BH_cH_bC$ та $BH_cHH_a$.
Аналогічно доводиться колінеарність точок $H_b, L, H_a$.

2. Доведемо, що точки $M, X, K$ – колінеарні.

Після гомотетії з центром у точці $H$ і коефіцієнтом $2$ отримуємо, що $H_c \to M$, $S \to X$ та $H_a \to K$, звідки й випливає шукане.
Аналогічно доводиться колінеарність точок $N, Y, K$.

3. Доведемо, що $XY \parallel MN$.
Це випливає з паралельностей $XY \parallel H_cH_b$ та $MN \parallel H_cH_b$, оскільки $H_cH_b$ – середня лінія $\Delta HMN$.

Таким чином далі зробимо гомотетію з центром у точці $K$ з таким коефіцієнтом, що $\Delta KXY \to \Delta KMN$. Отримаємо, що описані кола цих трикутників переходять одне в одне після гомотетії в спільній точці $K$, отже і дотикаються в цій точці.

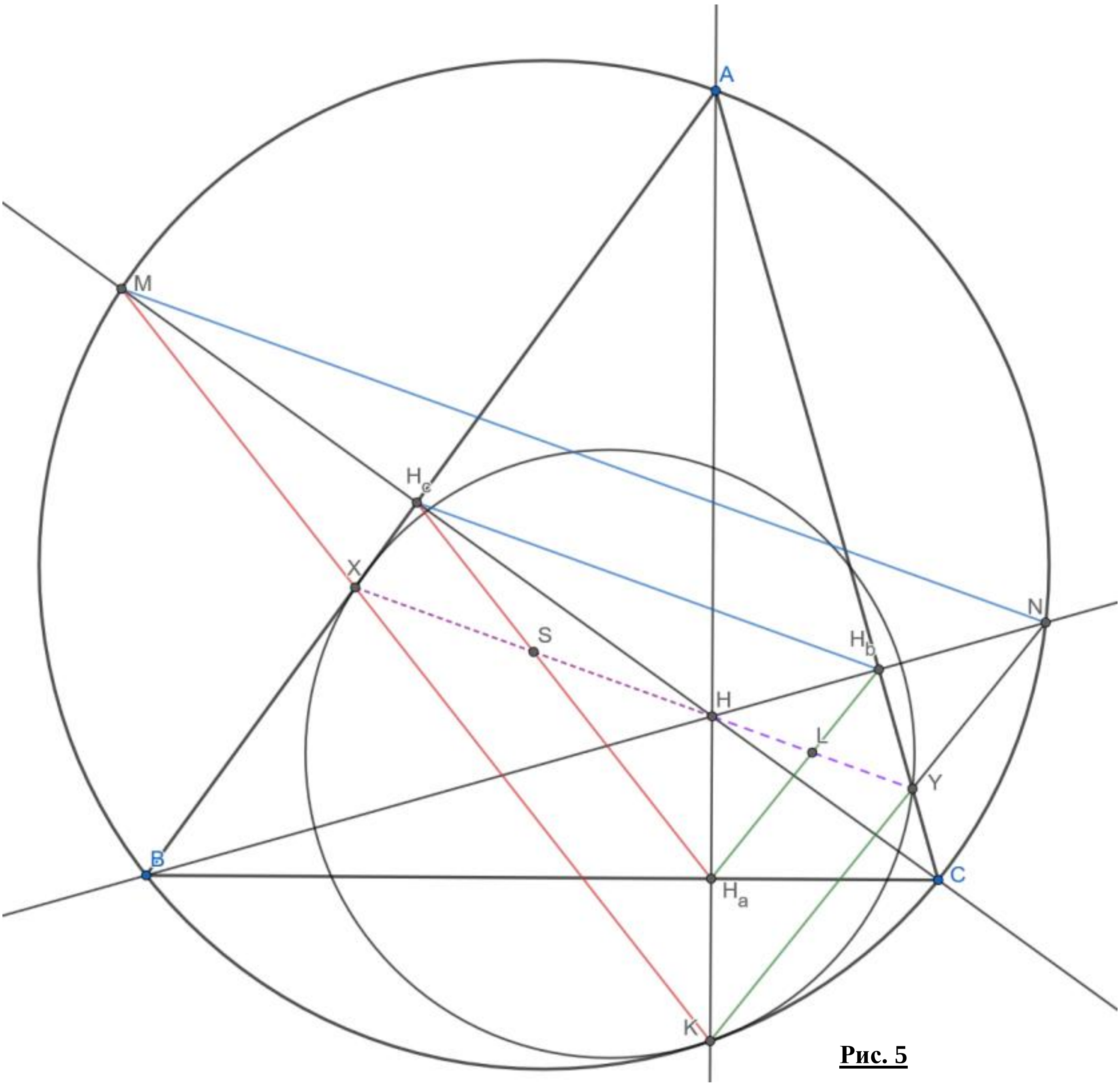


**Рис. 5**

**10–4.** Для дійсних чисел $a, b, c, d$, що задовольняють умову $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$, доведіть нерівність: $(2-a)(2-b)(2-c)(2-d) \geq 1$.

*(Сердюк Назар)*

***Розв'язання*.** Визначимо нові змінні $x=a-\frac{1}{2}$, $y=b-\frac{1}{2}$, $z=c-\frac{1}{2}$ та $t=d-\frac{1}{2}$. Тоді умова задачі запишеться таким чином:

$$1=(a^2-a+\tfrac{1}{4})+(b^2-b+\tfrac{1}{4})+(c^2-c+\tfrac{1}{4})+(d^2-d+\tfrac{1}{4})=x^2+y^2+z^2+t^2.$$

Тоді усі змінні $x, y, z, t$ за модулем не більші $1$, та $|x|+|y|+|z|+|t|\ge x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Шукана нерівність переписується таким чином:

$$(4-2a)(4-2b)(4-2c)(4-2d)=(3-2x)(3-2y)(3-2z)(3-2t)\ge 16.$$

Зауважимо, що якщо в останній нерівності якась із змінних, наприклад, $x$ – від'ємна, то поміняємо її на $x'=-x$, при цьому з умови $3-2x>3-2x'$, зрозуміло, що достатньо довести нерівність лише за умов додатності усіх чотирьох змінних $x, y, z, t$.

<u>*Лема*</u>. Для невід'ємних змінних $x, y$, що задовольняють умову $x+y\le 1$, справджується нерівність: $(3-2x)(3-2y)\ge(3-2p)^2$, де $p=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

*Доведення*. Очевидно, що $p=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\le\sqrt{\frac{1}{2}}$. Позначимо через $s=\frac{x+y}{2}\le p=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$. Крім того, з умов зрозуміло, що $s=\frac{x+y}{2}\le\frac{1}{2}$.

Тоді $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=4s^2-2p^2$. Перепишемо потрібну нерівність таким чином:

$$(3-2x)(3-2y)\ge(3-2p)^2 \Leftrightarrow (3-2x)(3-2y)\ge\left(3-\sqrt{2(x^2+y^2)}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$9-6x-6y+4xy\ge 9-6\sqrt{2(x^2+y^2)}+2(x^2+y^2) \Leftrightarrow -12s+8s^2-4p^2\ge -12p+4p^2 \Leftrightarrow$$

$$12(p-s)\ge 8(p^2-s^2) \Leftrightarrow 3(p-s)\ge 2(p-s)(p+s) \Leftrightarrow 2p+2s\le 3 \Leftrightarrow 2p+2s\le\sqrt{2}+1<3.$$

*Лема доведена*.

Застосуємо її декілька раз:

$$(3-2x)(3-2y)(3-2z)(3-2t)\ge$$

$$\ge\left(3-2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2\cdot\left(3-2\sqrt{\frac{z^2+t^2}{2}}\right)^2\ge\left(3-2\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}\right)^4=16,$$

що й треба було довести.

## 11 клас

**11–1.** Нехай $a_1<a_2<\ldots<a_k$ – деякі натуральні числа. Для кожного $a_i$ Заріна виписала в зошит усі натуральні дільники $a_i$ (деякі числа можуть повторюватися). Далі Маруся розбила усі виписані Заріною числа на декілька груп. Виявилось, що числа в кожній з груп утворюють повний набір дільників деякого числа, які Маруся вирішила потім виписати на дошку. Доведіть, що на дошці виписані числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

*(Ніколаєв Арсеній)*

***Розв'язання*.** Зауважимо, що в зошиті у Заріни число $a_k$ виписане рівно один раз, оскільки воно є найбільшим з усіх. Таким чином, серед груп, на які розбивала Маруся ці числа, є група, що містить $a_k$, тому у цій групі мають бути усі дільники числа $a_k$. Тому на дошці є виписаним число $a_k$. Викреслимо із зошита Заріни усі дільники $a_k$ по одному разу. Тепер аналогічними міркуваннями для числа $a_{k-1}$ отримаємо, що на дошці виписане й це число. І так далі, отримаємо шукане, що на дошці виписані усі числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$.

**11–2.** У школі кожен учень дружить не більше ніж з $n$ учнями цієї школи. Натуральні числа $a$ та $b$ такі, що $a+b=n-1$. Доведіть, що учнів можна розділити на дві групи $A$ і $B$ таким чином, що кожен учень групи $A$ має не більше ніж $a$ друзів серед учнів групи $A$, а кожен учень групи $B$ має не більше ніж $b$ друзів серед учнів групи $B$.

*(Тригуб Антон)*

***Розв'язання.*** Розглянемо граф, вершини якого є учні школи, а ребра – дружба між ними. Серед усіх можливих розбиттів вершин графу на дві групи $A$ і $B$ виберемо те, в якому сума $S=b\cdot S_A+a\cdot S_B$ найменша можлива, де $S_A$ та $S_B$ – кількість ребер у групі $A$ та у групі $B$. Покажемо, що воно задовольняє умові.

Справді, припустимо, що в групі $A$ знайшлась вершина степені принаймні $a+1$, тоді усі проведені ребра з неї дають внесок принаймні $b(a+1)$ в напівінваріант $S$. В цієї вершини не більше за $b$ сусідів в групі $B$, тому якщо перекинути її в групу $B$, то ми віднімемо від $S$ принаймні $b(a+1)$ і додамо максимум $ba$ до суми, тобто сума зменшиться. Аналогічні міркування застосовуються до групи $B$.

**11–3.** Знайдіть усі функції $f:R\to R$, для яких для довільних дійсних $x,\ y\in R$ справджується рівність:

$$(x+y)f(x+y)=(f(f(x)+f(y)))^2.$$

*(Коваль Вадим)*

***Відповідь:*** $f(x)=0$ та $f(x)=x$.

***Розв'язання.*** Позначимо рівність в умові через **(1)**, при цьому підстановки в це співвідношення $x=a$ та $y=b$ будемо позначати через $P(a,\ b)$.

Простою підстановкою переконуємося, що $f(x)=0$ та $f(x)=x$ задовольняють умову задачі. Нехай $f\not\equiv 0$.

$P(0,\ 0)$: $f(2f(0))=0$.

$P(2f(0),0)$: $2f(0)f(2f(0))=(f(f(2f(0))+f(0)))^2 \Rightarrow f(f(0))=0$.

$P(f(0),\ f(0))$: $2f(0)f(f(0)+f(0))=(f(f(f(0))+f(f(0))))^2 \Rightarrow f(0)=0$

$P(x,0)$:

$$xf(x)=(f(f(x)))^2. \qquad \textbf{(2)}$$

З рівності (2) можемо припустити, що

$$f(a)=f(b) \Rightarrow af(a)=(f(f(a))^2=(f(f(b)))^2=bf(b) \Rightarrow f(a)=f(b)=0.$$ Тобто

$$f(a)=f(b) \Rightarrow f(a)=f(b)=0. \qquad \textbf{(*)}$$

Отже, якщо ми доведемо, що існування ненульового $x_0$, для якого $f(x_0)=0$ можливе лише якщо $f\equiv 0$, то з припущення, що вона не тотожній нуль, то вона ін'єктивна.

Доведемо, що якщо існує ненульове $x_0$: $f(x_0)=0$, то це можливе лише за умови, що $f\equiv 0$. З рівності (2) маємо, що

$$f(f(x))=0 \Leftrightarrow f(x)=0. \qquad \textbf{(3)}$$

$P(x,\,x_0):\ (x+x_0)f(x+x_0)=(f(f(x)))^2\overset{(2)}{=}(f(f(x+x_0)))^2$, тобто

$$(f(f(x)))^2=(f(f(x+x_0)))^2. \qquad \textbf{(4)}$$

З (2) також очевидно, що

$$f(x)\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\ge 0 \text{ та } f(x)\le 0 \;\Leftrightarrow\; x\le 0. \qquad \textbf{(5)}$$

Припустимо, що існує $x_1>\max\{-x_0,\,0\}$, для якого $f(x_1)\ne 0$. Тоді з (3) та (5) випливає, що $f(f(x_1))$ та $f(f(x_1+x_0))$ додатні, отже $f(f(x_1))=f(f(x_1+x_0))$. З рівності цих значень з (*) випливає, що $f(f(x_1))=f(f(x_1+x_0))=0\overset{(3)}{\Rightarrow} f(x_1)=f(x_1+x_0)=0$ – суперечність з вибором $x_1$. Отже

$$\forall x>\max\{-x_0,\,0\}\;\; f(x)=0. \qquad \textbf{(6)}$$

Припустимо, що для деякого $y_1$ виконується $f(y_1)\ne 0$. Покладемо в рівності (4) $x=y_1$

$$(f(f(y_1)))^2=(f(f(y_1+x_0)))^2,$$

де $x_0>\max\{-x_0,\,0\}$. Оскільки $x_0$ можна вибрати достатньо великим, щоб $y_1+x_0>\max\{-x_0,\,0\}$, то $f(f(y_1))=0$, що суперечить умові (3).
Таким чином, якщо $f$ не ін'єктивна, то вона тотожній нуль.

Нехай тепер $f$ ін'єктивна. Тоді з (1) та (2) маємо, що

$$(f(f(x+y)))^2=(f(f(x)+f(y)))^2. \qquad \textbf{(7)}$$

Покладемо тут $x,\,y>0$, тоді з (5) матимемо, що

$$f(f(x+y))=f(f(x)+f(y))\overset{(3)}{\Rightarrow} f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Тобто $f$ адитивна та додатна на додатних аргументах. Цього достатньо, щоб існувало невід'ємне значення $k$, для якого $f(x)=kx$. З умови (2) отримаємо, що $k=k^4\;\Rightarrow\; k=1$. Аналогічно, якщо розглянути (7) для від'ємних значень, то матимемо, що $f(x)=x$ для усіх дійсних $x$.

**11–4.** Нехай $ABC$ гострокутний не рівнобедрений трикутник. Його бісектриси $AL_1$ та $BL_2$ перетинаються в точці $I$. Точки $D$ та $E$ вибираються на відрізках $AL_1$ та $BL_2$ відповідно таким чином, що $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle A$ та $\angle EAC=\frac{1}{2}\angle B$. Прямі $AE$ та $BD$ перетинаються в точці $P$. Точка $K$ – симетрична точці $I$ відносно прямої $DE$. Доведіть, що прямі $KP$ та $DE$ перетинаються на описаному колі $\Delta ABC$.

*(Хілько Данило)*

***<u>Розв'язання</u>*.** Позначимо кути $\Delta ABC$ стандартним чином через $\alpha$, $\beta$ та $\gamma$. Нехай точка $N$ – середина дуги $ACB$ описаного кола $\Delta ABC$ (рис. 6). Покажемо, що $N$ лежить на прямій $DE$.
Спочатку побачимо, що обидві точки – $D$ та $E$ лежать всередині $\Delta ANB$. Дійсно, оскільки вони лежать всередині $\Delta ABC$, то $\frac{1}{2}\beta=\angle EAC<\angle BAC=\alpha$ та $\frac{1}{2}\alpha=\angle DBC<\angle ABC=\beta$. Також

$$\angle NAB=\angle NBA=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle ACB=90^\circ-\tfrac{1}{2}\gamma=\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

$$\angle EBA=\tfrac{1}{2}\beta<\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\angle NBA \text{ та } \angle EAB=\alpha-\tfrac{1}{2}\beta<\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)=\angle NAB,$$

оскільки $\frac{1}{2}\alpha<\beta$. Таким чином $E$ лежать всередині $\Delta ANB$. Аналогічно доводиться і для точки $D$.
Крім того ми маємо, що $\angle EAB=\alpha-\frac{1}{2}\beta$, $\angle NAE=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-(\alpha-\frac{1}{2}\beta)=\beta-\frac{1}{2}\alpha$, $\angle NBI=\frac{1}{2}\alpha$, $\angle IBA=\frac{1}{2}\beta$. З теореми Чеви маємо, що

$$1 = \frac{\sin\angle ANE}{\sin\angle ENB}\cdot\frac{\sin\angle NBE}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle EAN},$$

після відповідних підстановок матимемо, що

$$\frac{\sin\angle ENB}{\sin\angle ANE} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin(\beta-\frac{1}{2}\alpha)}.$$

З аналогічних міркувань $\angle DAB = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle DAN = \frac{1}{2}\beta$, $\angle DBA = \beta - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle NBD = \alpha - \frac{1}{2}\beta$. Знову з теореми Чеви маємо, що

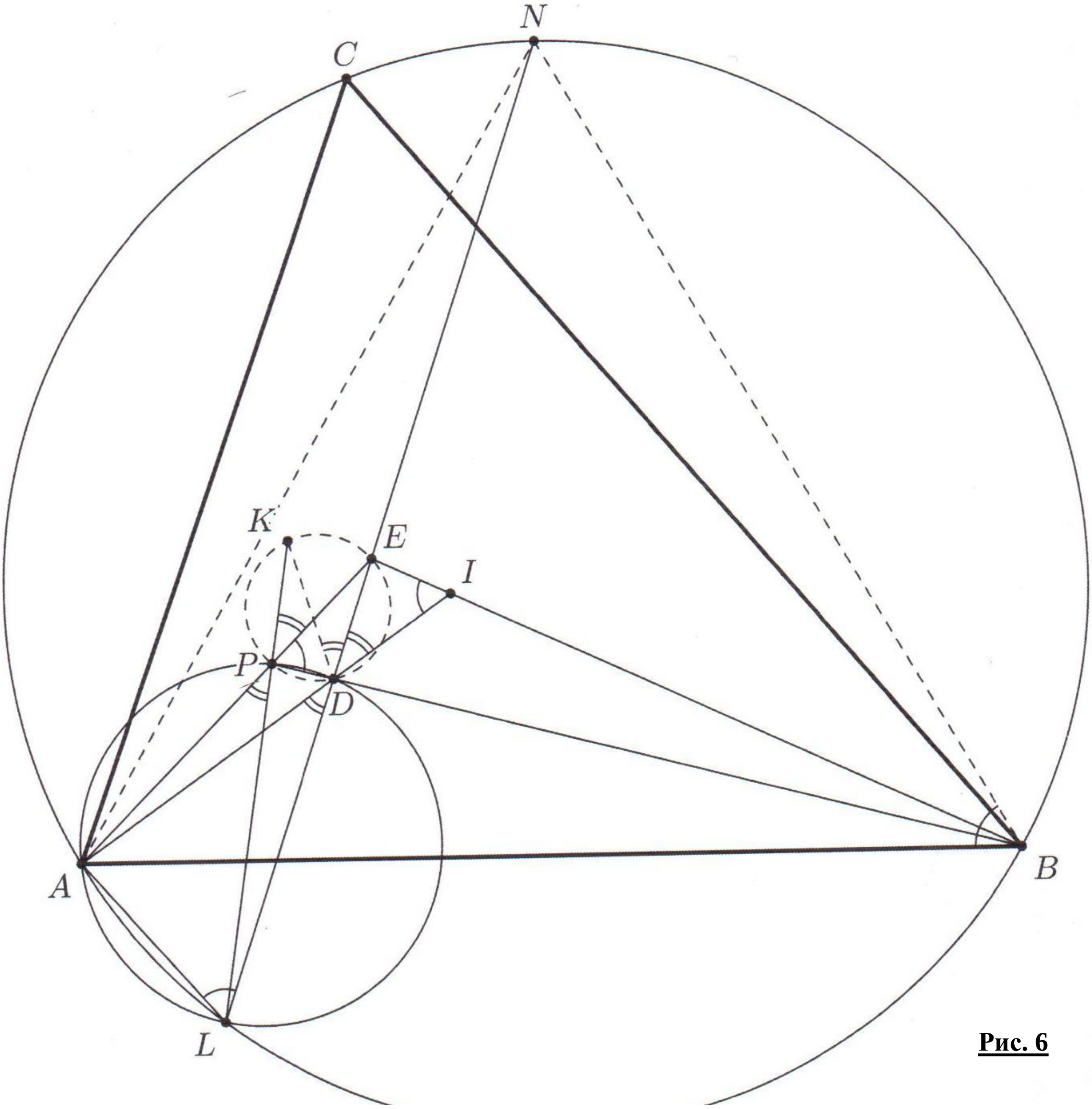


**Рис. 6**

$$1 = \frac{\sin\angle AND}{\sin\angle DNB}\cdot\frac{\sin\angle NBD}{\sin\angle DBA}\cdot\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAN} \text{ або } \frac{\sin\angle DNB}{\sin\angle AND} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\beta}\cdot\frac{\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{\sin(\beta-\frac{1}{2}\alpha)} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\angle ENB}{\sin\angle ANE} = \frac{\sin\angle DNB}{\sin\angle AND}.$$

Таким чином промені $ND$ та $NE$ співпадають, тому що

$$\angle BNA = \angle ANE + \angle ENB = \angle AND + \angle DNB.$$

Нехай тепер $L$ – друга точка перетину $DE$ та описаного кола $\Delta ABC$. Покажемо, що $KP$ проходить через точку $L$. Очевидно, що

$$\angle(AL,\ LN) = \angle(AB,\ BN) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

З іншого боку,

$$\angle(AP,\ PB) = \angle(PA,\ AB) + \angle(AB,\ BP) = \alpha - \tfrac{1}{2}\beta + \beta - \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Таким чином $\angle(AL,\ LN) = \angle(AP,\ PB)$ і чотирикутник $APDL$ – вписаний. Також ми маємо, що $\angle(DI,\ IE) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = \angle(EP,\ PB)$. З симетрії $\angle(EK,\ KD) = \angle(DI,\ IE)$ та $\angle(KD,\ DE) = \angle(ED,\ DI)$, тому $\angle(EK,\ KD) = \angle(EP,\ PD)$ та $PKED$ – вписаний. І остаточно

$$\angle(KP,\ PE) = \angle(KD,\ DE) = \angle(ED,\ DI) = \angle(LD,\ DA) = \angle(LP,\ PA).$$

Таким чином ми отримали, що $\angle(KP,\ PE) = \angle(LP,\ PA)$, оскільки $AP$ та $EP$ співпадають, то $KP$ проходить через точку $L$, що й завершує доведення.