Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

2 тур

~~18 березня~~ 21 липня 2020 року

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

м. ~~Миколаїв~~ Київ

8 клас

8–5. Нехай a, b, c – довільні ненульові числа. Визначимо такі величини: $A=\frac{a^2+b^2}{c^2}$, $B=\frac{b^2+c^2}{a^2}$, $C=\frac{c^2+a^2}{b^2}$, а також $P=A\cdot B\cdot C$ та $S=A+B+C$. Які значення може приймати вираз $P-S$?

Відповідь: 2.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$P=ABC=(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2})(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2})(\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2})=1+\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}+1=2+S \Rightarrow$$
$$P-S=2.$$

8–6. На площині вибрані $2n$ точок. Доведіть, що можна розбити їх на n пар таким чином, щоб виконувалась наступна умова: якщо на двох точках з кожної пари побудувати круг, як на діаметрі, то в отриманих n кругів буде деяка спільна точка, не обов'язково серед вибраних.

(Тригуб Антон)

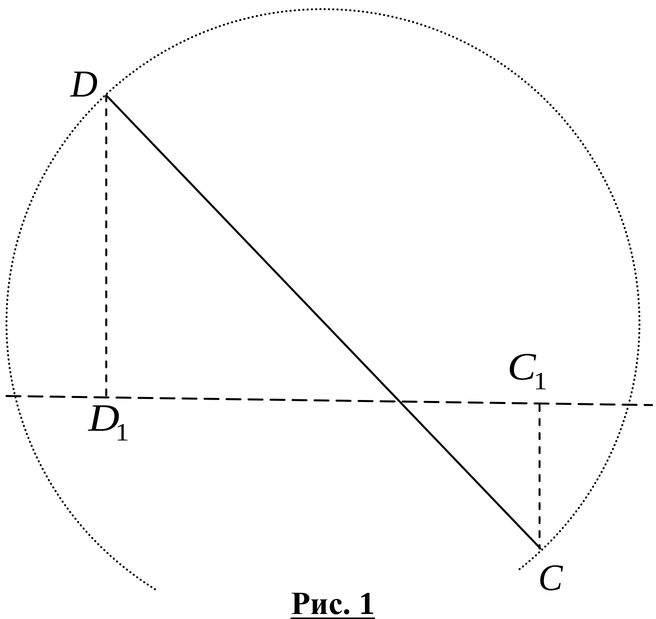

Рис. 1

***Розв'язання*.** Розглянемо пряму l таку, що по кожен бік від неї лежить рівно n точок – така пряма, очевидно, існує. Без обмеження загальності вважаємо, що пряма l – вісь абсцис. Тоді впорядкуємо точки за зростанням абсциси. У верхній півплощині це: A_1 A_2, …, A_n, а в нижній: B_1 B_2, …, B_n. Об'єднаємо в пари точки (A_1, B_n), (A_2, B_{n-1}), …, (A_n, B_1). Покажемо, що круги, побудовані на даних парах, як на діаметрах, матимуть спільну точку, що належатиме прямій l.

Покажемо, що проекції на пряму l будь-яких двох відрізків, що формують вибрані пари, перетинаються. Справді, при $i<j$ проекції відрізків A_iB_{n+1-i} та A_jB_{n+1-j} такі, що проекція точки A_i – не правіше точки A_j, а проекція точки B_i – не лівіше від точки B_j.

Далі серед усіх відрізків A_1B_n, …, A_nB_1 виберемо останній з додатнім коефіцієнтом, нехай це A_iB_{n+1-i}, тоді шуканий відрізок - перетин йвідрізків A_iB_{n+1-i} та $A_{i+1}B_n$. А далі очевидно, якщо точка лежить на проекції відрізка на пряму, що перетинає цю пряму, то вона лежить в крузі, побудованого на кінцях відрізка, як на діаметрі (рис. 1), що завершує доведення.

8–7. Пару натуральних чисел (a, b) назвемо *цікавою*, якщо існує таке натуральне n, що мінімальний простий дільник числа $a+n$ дорівнює максимальному простому дільнику числа $b+n$. Знайдіть усі цікаві пари натуральних чисел.

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: усі пари чисел (a, b), що задовольняють умову $|a-b|\neq 1$.

***Розв'язання*.** Розглянемо довільну пару натуральних чисел $(a,\ b)$. Якщо $|\,a-b\,|=1$, то ця пара не цікава, бо $a+n$ та $b+n$ не можуть взагалі мати спільний дільник більший за 1, бо це є сусідні числа.
Нехай тепер $|\,a-b\,|\neq 1$. Покажемо, що пара $(a,\ b)$ – цікава. Розглянемо найменше просте число p, що ділить $|\,a-b\,|$. Позначимо через $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ – усі прості числа, що менші від p, зрозуміло, що їх може й не існувати. З вибору p зрозуміло, що жодне з чисел $p_1,\ \ldots,\ p_s$ не ділить $|\,a-b\,|$. Виберемо достатньо велике натуральне число k, що $p^k > b$ та покладемо $n = p^k p_1 \ldots p_s - b$. Зрозуміло, що найбільший простий дільник $b+n$ дорівнює p. Тепер розглянемо число $n + a = p^k p_1 \ldots p_s + (a-b)$. За побудовою видно, що $p^k p_1 \ldots p_s + (a-b)$ ділиться на p, але не ділиться на жодне з чисел $p_1,\ \ldots,\ p_s$, тобто найменший простий дільник числа $a+n$ дорівнює p, що співпадає з найбільшим простим дільником числа $b+n$.

8–8. На дошці, що складається з 2020×2020 комірок (клітин), Андрій та Олеся грають у гру за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає «фінальну комірку», після цього Андрій вибирає «початкову комірку», що не має спільних точок з фінальною. Далі Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій з обраної ним початкової комірки) фарбують комірки дошки в блакитний (Андрій) та жовтий (Олеся) кольори за такими правилами. Кожний своїм черговим ходом має фарбувати клітину, що має спільну сторону чи вершину із клітиною зафарбованою супротивником на попередньому ході і яка не була раніше зафарбована в жодний з кольорів. Перемагає той, хто зафарбує своїм ходом фінальну комірку, або якщо виникне ситуація, за якої супротивник не може зробити за правилами черговий хід.

а) Які комірки може вибрати Олеся в якості фінальних, щоб напевно перемогти, не залежно від того, яку комірку в якості початкової обере Андрій?

б) Для яких комірок, які може вибрати Олеся в якості фінальних, у Андрія існує можливість вибрати початкову комірку таким чином, щоб перемоги самому?

(Рубльов Богдан)

Відповідь*: *а)будь які поля на межі дошки; ***б)*** поля, що не лежать на межі.
Розв'язання. Перед доведенням сформулюємо очевидне твердження.

Лема. Будь-який прямокутник, що має принаймні одну парну сторону, можна розрізати на фігурки "доміно", тобто фігурки, що складають з двох сусідніх комірок зі спільною стороною.

Доведення. Нехай прямокутник має розміри $2n\times m$. Тоді спочатку його розріжемо на n смуг $2\times m$, кожна з яких очевидно розрізається на m фігурок доміно.
Лема доведена.

Зафарбуємо у чорний колір усі комірки, що мають спільні точки з фінальною коміркою. Це буде або квадрат 2×2 (для кутової клітини), або прямокутник 2×3 (для не кутової комірки на межі), або квадрат 3×3. Зрозуміло, що той, хто вперше своїм ходом фарбує чорну клітинку, то він програє. Ця клітина не може бути фінальною, бо це перше фарбування чорних клітин, а фінальна клітина розташована всередині "чорної групи". Але будь-яка чорна межує з фінальною, тому супротивник наступним ходом фарбує фінальну клітину і перемагає.

а) Якщо Олеся вибирає фінальну клітину на межі, то поле, що лишилося після вилучення чорних клітин, має парну кількість клітин і його треба розбити на доміно. Для того просто розріжемо його на прямокутники, що задовольняють умови наведеної вище леми. Відріжемо від краю заданого квадрату смугу 2×2020, що містить усі чорні клітини. Тоді ми матимемо великий прямокутник 2018×2020 та два (чи один) прямокутники з однією стороною 2. Таким чином наше поле розбите на доміно, на початку гри усі не зафарбовані та чорну групу клітин. Початкове поле Андрія не може бути чорним. Далі Олесина стратегія така: Андрій фарбує певну клітину, а Олеся своїм ходом фарбує другу клітину, що утворювала доміно з клітиною Андрія. Якщо Андрій може зробити хід, то Олеся так само може його зробити в другу клітину доміно. Якщо Андрій своїм ходом потрапить у чорну клітину, то Олеся своїм ходом переможе, зафарбувавши фінальну комірку.

б) Якщо Олеся вибирає фінальну клітину не на межі, то поле, що лишилося після вилучення чорних клітин, має непарну кількість клітин. Покажемо, що Андрій завжди його зможе розрізати на доміно і одну окрему клітинку, яку він обере в якості початкової. Далі використає стратегію, що була описана вище для Олесі в пункті ***а)***. Належне розрізання можна організувати, наприклад, таким чином. Якщо вважати сторони квадрату горизонтальними та вертикальними, то чорний квадрат 3×3 має непарну відстань від однієї з горизонтальних сторін великого квадрату та парну до іншої, так само і для вертикальних сторін. Тому добудуємо чорний квадрат 3×3 до квадрата 4×4 таким чином, щоб відстані до усіх сторін великого квадрату стали парними. Тепер оці доповнення легко поділяються на доміно. А поділ доповнення квадрату 3×3 показане на рис. 2. Маємо більш темні доміно, та біла клітинка, яка є початковою.

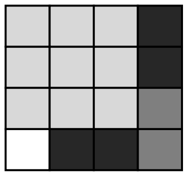

Рис. 2

9 клас

9–5. Для натуральних чисел $a\ge b\ge c\ge d$ доведіть нерівність:

$$ab+bc+cd-b^2-c^2-d^2\ge a-d\,.$$

(Ніколаєв Арсеній)

***Розв'язання*.** Зробимо такі перетворення:

$$ab+bc+cd-b^2-c^2-d^2=b(a-b)+c(b-c)-d(c-d)\ge$$
$$\ge(a-b)+(b-c)+(c-d)=a-d\,.$$

9–6. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром у точці O. На променях AB, AD, CB та CD відклали рівні відрізки AA_1, AA_2, CC_1 та CC_2, довжина яких більша за довжину будь-якої зі сторін чотирикутника $ABCD$ Виявилось, що точки A_1, A_2, C_1 та C_2 лежать на одному колі з центром у точці O. Доведіть, що прямі A_1A_2, C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці або паралельні.

(Артемчук О., Мороз М.)

***Розв'язання*.** Нехай точки K та P – точки дотику вписаного в $ABCD$ кола до сторін AB та BC відповідно (рис. 3). Зрозуміло, що $\Delta C_1PO=\Delta A_1KO$, оскільки вони прямокутні і мають рівні катети $KO=PO$ та гіпотенузи $C_1O=A_1O$ як радіуси відповідних кіл. Звідси випливає, що $C_1P=A_1K$. Оскільки $BK=BP$, як дотичні до кола, проведені з однієї точки, то $C_1B=A_1B$. Аналогічно $C_2D=A_2D$. Зокрема, з вище доведеного випливає, що $AB=BC$ та $AD=CD$. Таким чином чотирикутник $ABCD$ – дельтоїд, у якого діагональ BD – вісь симетрії, тому точки B, D та O лежать на одній прямій.

Пряма BD проходить через точки B та O. Ці точки рівновіддалені від кінців відрізка A_1C_1, а тому точки B та O належать його серединному перпендикуляру. Аналогічно, пряма BD є серединним перпендикуляром до A_2C_2. Оскільки $BD\perp A_1C_1$ та $BD\perp A_2C_2$, то $A_1C_1 \parallel A_2C_2$. Далі маємо два випадки:

Якщо $A_1A_2 \parallel C_1C_2$, то чотирикутник $A_1A_2C_2C_1$ – паралелограм. Оскільки він вписаний, то $A_1A_2C_2C_1$ – прямокутник. Усі три прямі A_1A_2, C_1C_2 та BD перпендикулярні до прямої A_1C_1, а тому вони паралельні.

Якщо A_1A_2 та C_1C_2 не паралельні, то чотирикутник $A_1A_2C_2C_1$ – трапеція. Оскільки пряма BD проходить через середини основ трапеції, то на ній також лежить точка перетину прямих, що є продовженням бічних сторін трапеції A_1A_2 та C_1C_2. Тому прямі A_1A_2, C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці.

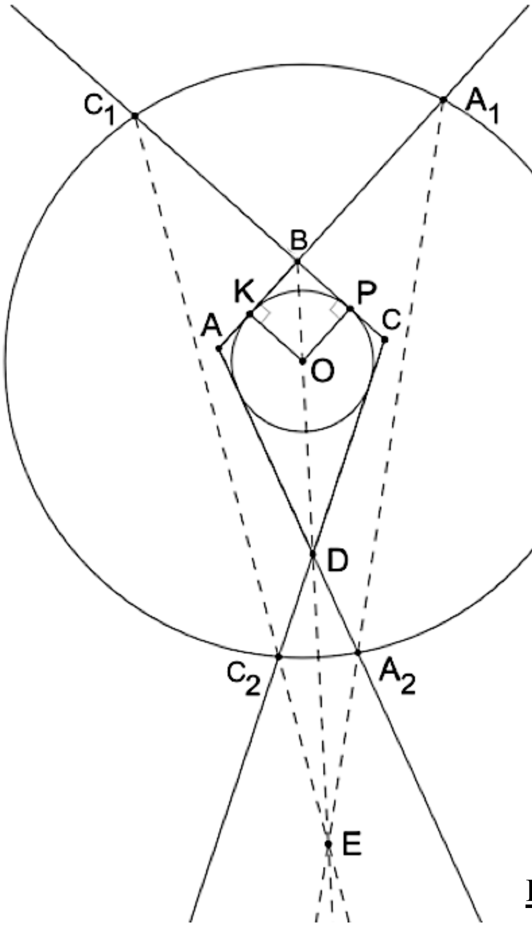

Рис. 3

9–7. Є 4 країни, в кожній з яких є декілька міст. Між містами будь-яких двох різних країн прокладено не менше ніж $\frac{5}{6}$ від загальної можливої кількості доріг між цими країнами. Доведіть, що з кожної країни можна вибрати по місту так, що між будь-якими двома містами з цих чотирьох прокладена дорога. Між будь-якими двома містами можна прокласти не більше однієї дороги.

(Сердюк Назар)

***Розв'язання*.** Позначимо країни X, Y, Z, T. Виберемо випадковим чином по одному місту x, y, z, t з кожної з країн відповідно. Тоді якщо між ними проведені усі 6 доріг, то твердження доведене. Якщо між якоюсь з таких четвірок проведене менше 5 доріг, то має існувати четвірка, між якими проведене усі 6 доріг. Інакше кількість можливих проведених доріг буде менше $\frac{5}{6}$. Таким чином для виконання умов задачі між кожними чотирма містами має бути проведеними рівно 5 доріг. Так само між кожними двома країнами проведене рівно $\frac{5}{6}$ усіх доріг, тобто між країнами є не з'єднані міста.

Виберемо міста $x \in X$, $y \in Y$, між якими немає дороги. Розглянемо довільні $z \in Z$ та $t \in T$. Оскільки в четвірці x, y, z, t має бути рівно 5 доріг, дорога між містами z, t буде присутня. Оскільки ми вибрали довільні міста $z \in Z$ та $t \in T$, то кожне місто країни Z з'єднане з кожним містом країни T, що суперечить з'єднанню між країнами. Одержана суперечність завершує доведення.

9–8. Для яких натуральних $n > 1$ існує множина з попарно різних натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для яких справджується умова:

$$(a_1+1)! + (a_2+1)! + \ldots + (a_n+1)! \,\vdots\, a_1! + a_2! + \ldots + a_n!.$$

(Тригуб Антон)

Відповідь: таких множин не існує.

***Розв'язання*.** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Без обмеження загальності вважатимемо, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тоді $(a_i+1)! \le a_i! \cdot (a_n+1)$, причому рівність виконується лише для $i = n$.

Нехай $(a_1+1)!+(a_2+1)!+\ldots(a_n+1)!=N(a_1!+a_2!+\ldots+a_n!)$ для деякого натурального N. Тоді з твердження вище випливає, що $N \le a_n+1$, причому при $n>1$, то $N<a_n+1$.

Нехай тепер $n>1$, тоді ми маємо, що $N \le a_n$. Доведемо, що це неможливо, показавши, що

$$(a_1+1)!+(a_2+1)!+\ldots(a_n+1)!>a_n(a_1!+a_2!+\ldots+a_n!).$$

Розглянемо такий вираз:

$$(a_1+1)!+(a_2+1)!+\ldots+(a_n+1)!-a_n(a_1!+a_2!+\ldots+a_n!)=\sum_{i=1}^{n}a_i!(a_i+1-a_n).$$

У цій сумі останній доданок рівний $a_n!$. Якщо $a_{n-1}=a_n-1$, то передостанній доданок рівний нулю. Тепер досить записати таке:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i!\cdot(a_n-1-a_i)\le\sum_{i=1}^{a_n-1}i!(a_n-1-i)=\sum_{i=1}^{a_n-2}i!(a_n-1-i)\le\sum_{i=1}^{a_n-2}i!\cdot a_n=a_n\sum_{i=1}^{a_n-2}i!\le$$
$$\le a_n(a_n-2)(a_n-2)!<a_n!\Rightarrow(a_1+1)!+(a_2+1)!+\ldots(a_n+1)!-a_n(a_1!+a_2!+\ldots+a_n!)>0,$$

що ми й хотіли довести. Отже, при $n>1$ таких множин не існує.

10 клас

10–5. Зростаюча геометрична прогресія з 5 натуральних чисел задовольняє таку умову: квадрат суми другого та четвертого членів у 100 разів більший за суму першого, п'ятого та подвоєного третього члена цієї прогресії. Яке найбільше трицифрове число може бути членом цієї прогресі?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 625.

***Розв'язання*.** Позначимо члени прогресії традиційним чином: $b_1=b$, $b_2=bq$, …, $b_5=bq^4$. Тоді умова задачі запишеться таким чином:

$$(b_2+b_4)^2=100(b_1+2b_3+b_5)\ \Rightarrow\ b^2q^2(1+q^2)^2=100b(1+2q^2+q^4)\ \Rightarrow\ bq^2=100.$$

За умовою $q>1$, бо прогресія зростаюча. При цьому вона складається з натуральних чисел, тому b – натуральне, а $q=\frac{m}{n}$ – раціональне, де $(m,n)=1$. Тоді $bm^2=100n^2$. Таким чином $m\in\{2,5,10\}$, бо $m>n$ та $m^2\mid 100$. Оскільки $b_5=bq^4=100\frac{m^2}{n^2}$ – натуральне, то $n^2\mid 100$. Звідси маємо такі варіанти для q: для $n=1$ маємо $q=2$, $q=5$ та $q=10$, для $n=2$ маємо $q=\frac{5}{2}$. Для інших n шуканого q не існує.

Для кожного з цих випадків знайдемо можливі значення b_4, b_5, щоб з'ясувати відповідь до задачі. Нагадаємо, що в усіх випадках $b_3=100$.

$q=2$, $b_4=200$, $b_5=400$.

$q=5$, $b_4=500$, $b_5=2500$.

$q=10$, $b_4=1000$, $b_5=10000$.

$q=\frac{5}{2}$, $b_4=250$, $b_5=625$.

Таким чином шукане значення 625.

10–6. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, P – довільна точка на цій основі, T – проекція P на BC. У якому відношенні симедіана ΔPBC, що проведена з вершини C, ділить відрізок AT? *Симедіаною* ΔPBC називається такий відрізок CS,

$S \in BP$, що промінь CS є симетричним променя медіани CF відносно променю бісектриси CL.

(Тригуб Антон)

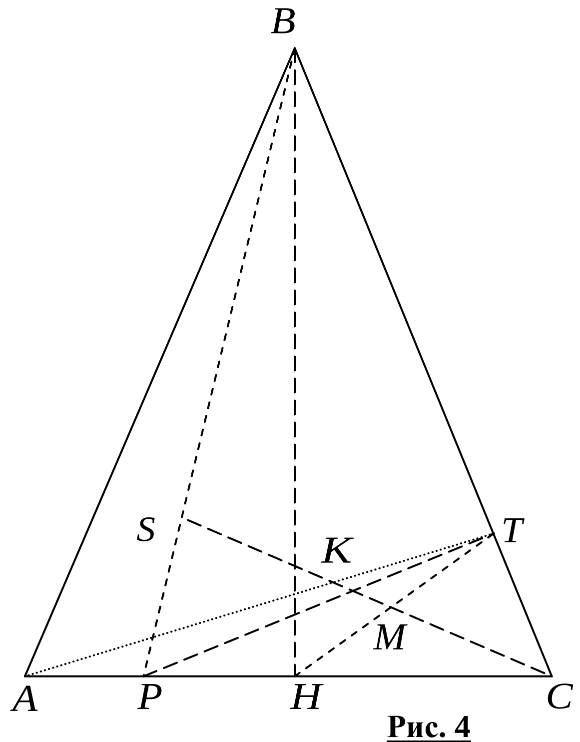

Рис. 4

Відповідь: $\frac{AK}{KT} = 2$.

Розв'язання. Нехай BH – висота трикутника ΔABC, тоді H – середина AC, а BH та PT – висоти ΔPBC (рис. 4). Згадаємо, що симедіана трикутника ділить відрізок між основами висот навпіл. Таким чином, симедіана ΔPBC проходить через середину HT – точку M. Нехай пряма CM перетинає AT у точці K, тоді за теоремою Менелая для ΔATH маємо: $\frac{AK}{KT} \cdot \frac{TM}{MH} \cdot \frac{HC}{CA} = 1 \Rightarrow \frac{AK}{KT} = \frac{AC}{CH} = 2$.

10–7. Шахівницю розбили на фігурки доміно, тобто на прямокутники 1×2 та 2×1. На кожній такій фігурці записали число, що дорівнює кількості фігурок доміно, які мають з нею спільний відрізок, без урахування самої фігурки. Яке найменше значення може приймати сума усіх чисел, що записані на шахівниці?

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь. 104.

Розв'язання. Будемо називати фігурки доміно *сусідніми*, якщо вони мають спільний відрізок довжиною 1 та *дружніми*, якщо вони мають спільний відрізок довжиною 2. Позначимо через S – шукану суму усіх чисел, що записана в фігурках. Вона дорівнює подвоєній кількості пар дружніх доміно $(2F)$ та подвоєній кількості пар сусідніх доміно $(2N)$.

Зрозуміло, що усього фігурок доміно 32, тому рівно 32 одиничних відрізки, які накриває доміно, є внутрішніми для фігурок доміно, по яких не може відбуватися сусідство. Усі інші одиничні відрізки, що не лежать на межі шахівниці, є спільними для двох фігурок, нехай їхня кількість $7 \cdot 8 \cdot 2 - 32 = 80$.

Очевидно, що $2F + N = 80$, оскільки в дружніх доміно спільна межа має довжину 2. Таким чином $S = 2F + 2N = (2F + N) + N = 80 + N = 160 - 2F$.

Назвемо *ланцюгом* – сукупність фігурок доміно $D_1, \ldots, D_k$, де D_i та D_{i+1} – дружні для $i = \overline{1, k}$, або окрему доміно, яка немає дружніх. Кожне доміно входить рівно до одного ланцюга. Таким чином утворюється C ланцюгів. Нехай в l-му ланцюгу k_l фігурок, тоді в ньому усього $(k_l - 1)$ дружня пара. Тоді разом дружніх пар $(k_1 - 1) + \ldots + (k_C - 1) = 32 - C = F$. Таким чином $S = 160 - 2F = 96 + 2C$. Тобто для мінімальності числа S треба щоб мінімальним була кількість ланцюгів C. Очевидно, що в ланцюгу не може бути більше 8 доміношек, а тому $C \geq 4$. Звідси випливає, що найменше можливе значення $S = 96 + 2C = 104$.

Залишається навести приклад, для якого $C = 4$. Його легко побудувати, достатньо усі фігурки доміно покласти однаковим чином, наприклад, більша сторона в усіх – вертикальна.

10–8. Нехай a та b – різні натуральні числа такі, що $a^2 + b^2 + 1 \vdots 2ab + 1$. Доведіть, що $2ab + 1$ – точний квадрат цілого числа.

(Номіровський Дмитро)

Розв'язання. Припустимо, що це не так, виберемо таку пару натуральних чисел $(a,\, b)$, для якої це не справджується, при цьому $a<b$ і ця пара має мінімальну суму $a+b$.

Лема 1. $a^2+b^2+1 \vdots 2ab+1 \Leftrightarrow (2a^2+1)^2 \vdots 2ab+1$.

Доведення. Оскільки $(a^2,\, 2ab+1)=1$, то $a^2+b^2+1 \vdots 2ab+1 \Leftrightarrow a^4+b^2a^2+a^2 \vdots 2ab+1 \Leftrightarrow$ $4a^4+4b^2a^2+4a^2 \vdots 2ab+1$, оскільки $2ab+1$ – непарне. Далі все випливає з такої рівності:

$$4a^4+4b^2a^2+4a^2=(4a^4+4a^2+1)+(4b^2a^2-1)=(4a^4+4a^2+1)+(2ab-1)(2ab+1).$$

Лема доведена.

Таким чином для обраних натуральних (a,b) маємо, що $a^2+b^2+1 \vdots 2ab+1$, тому $(2a^2+1)^2 \vdots 2ab+1$. Таким чином $(2a^2+1)^2=(2ab+1)(2ac+1)$. Тоді з умови $a<b$ маємо, що $0<c<a<b$, бо інакше права частина більша за ліву. Якщо $2ab+1$ – не точний квадрат, то й $2ac+1$ також. З леми випливає, що якщо $(2a^2+1)^2 \vdots 2ac+1$, то й $a^2+c^2+1 \vdots 2ac+1$. Таким чином ми знайшли пару натуральних чисел $(c,\, a)$, яка також задовольняє умову задачі і має суму компонент $c+a<a+b$, що суперечить вибору пари $(a,\, b)$. Одержана суперечність завершує доведення.

Альтернативне розв'язання. Зазначимо, що $\dfrac{a^2+b^2+1}{2ab+1}=1+\dfrac{(a-b)^2}{2ab+1}$. Таким чином $s=\dfrac{(a-b)^2}{2ab+1}$ – натуральне число. Припустимо, що $2ab+1$ не точний квадрат, без обмеження загальності вважатимемо, що $a>b$. Квадратне рівняння $x^2-2b(s+1)x+b^2-s=0$ має одним з коренів число $x_1=a$, в чому легко переконатися безпосередньою підстановкою. Тоді другим коренем є число $x_2=2b(s+1)-a=\dfrac{b^2-s}{a}$ – ціле число. Крім того,

$$0\le (x_2-b)^2=x_2^2-2bx_2+b^2=2b(s+1)x_2-b^2+s-2bx_2+b^2=s(2bx_2+1) \Rightarrow$$

$x_2 \ge -\frac{1}{2b}>-1$. Таким чином $x_2\ge 0$. Оскільки s не точний квадрат, то $x_2>0$. Крім того, $x_2=\frac{b^2-s}{a}<a$, оскільки $b<a$. Таким чином умові $s=\dfrac{(a-b)^2}{2ab+1}$ задовольняла пара $(a,\, b)$, а ми знайшли ще одну пару $(b,\, x_2)$, яка задовольняє ту саме умову $s=\dfrac{(b-x_2)^2}{2bx_2+1}$. Але в цій парі натуральних чисел $x_2<b$ та $b<a$. Тепер повторимо ті самі міркування, замінимо b на x. Тоді отримаємо квадратне рівняння $x^2-2x_2(s+1)x+x_2^2-s=0$. Його коренями будуть натуральні числа b та $x_3=\dfrac{x_2^2-s}{b}<x_2$. Таким чином існує ще одна пара $(x_2,\, x_3)$, кожна компонента якої менша від попередньої. Зрозуміло, що процес може тривати нескінченно довго, що неможливо для натуральних чисел. Одержана суперечність показує, що $2ab+1$ точний квадрат.

11 клас

11–5. Задача 10–6.

11–6. Паліндромом називається число, у якого запис цифр симетричний відносно середини, наприклад 7, 1221 та 57575 – паліндроми, а 1212 та 3330 – ні. Доведіть, що для будь-якої кількості попарно різних паліндромів сума обернених до них чисел не перевищує 11.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Виберемо довільне натуральне n та розглянемо усі паліндроми, що мають рівно n цифр. Розглянемо два випадки – парного та непарного n.

Для $n=2m$ паліндром має такий вигляд $\overline{a_1a_2..a_{m-1}a_ma_ma_{m-1}..a_2a_1}$, при цьому єдине обмеження на його цифри – це $a_1\neq 0$. Тому їх усього $9\cdot 10^{m-1}$ і кожний більший за 10^{2m-1}. Тому сума обернених до них величин не перевищує $\frac{9\cdot 10^{m-1}}{10^{2m-1}}=\frac{9}{10^m}$. Разом для усіх m ця сума не перевищує

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{9}{10^m}=9\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{10^m}=9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=9\cdot\frac{1}{9}=1.$$

Для $n=2m-1$ паліндром має такий вигляд $\overline{a_1a_2..a_{m-1}a_ma_{m-1}..a_2a_1}$, і знову єдине обмеження на його цифри – це $a_1\neq 0$. Тому їх усього $9\cdot 10^{m-1}$ і кожний більше за 10^{2m-2}. Тому сума обернених до них величин не перевищує $\frac{9\cdot 10^{m-1}}{10^{2m-2}}=\frac{9}{10^{m-1}}$. Разом для усіх m ця сума не перевищує

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{9}{10^{m-1}}=90\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{10^m}=90\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=90\cdot\frac{1}{9}=10.$$

Таким чином шукана величина не перевищує 11.

11–7. Для деяких цілих невід'ємних m, n рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=\frac{577}{408}$ має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=\frac{577}{408}$ має розв'язок в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ для деяких цілих невід'ємних $k<m$ та $l<n$.

(Голованов Олександр)

Розв'язання. Ми доведемо більш загальне твердження: якщо рівняння рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=a$ для деякого $a\neq 0$ має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$, то рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=a$ має розв'язок в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ для деяких цілих невід'ємних $k<m$ та $l<n$.

Доведення проведемо індукцією по $m+n$. При $m+n=1$ маємо, що для $a>0$ повинно бути $m=1$ та $n=0$, тому задане рівняння має стає таким $\frac{1}{x_1}=a$ і розв'язків не більше одного. Аналогічно для випадку $a<0$.

Припустимо, що твердження справджується при $m+n<t$, і що рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=a$, у якому $m+n=t$, має нескінченну кількість розв'язків. Без обмеження загальності розгляду можемо вважати, що $a>0$; при цьому ми можемо розглядати лише розв'язання, в яких $x_1\le x_2\le\ldots\le x_m$ (яких, очевидно, так само нескінченно багато). Оскільки $a\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}\le\frac{m}{x_1}$, то $x_1\le\frac{m}{a}$. Таким чином, x_1 приймає скінченну кількість значень, та принаймні одного з цих значень $x_1=c$ рівняння $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=a-\frac{1}{c}$ має нескінченно багато розв'язків. Якщо $a-\frac{1}{c}\ne 0$, то за припущенням індукції рівняння $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=a-\frac{1}{c}$ має розв'язок для деяких $k<m$ та $l<n$. Тоді має розв'язок і рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=a$.

Залишається розглянути випадок $a-\frac{1}{c}=0$, тобто коли єдине значення x_1, для якого рівняння $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=a-\frac{1}{x_1}=0$ має нескінченну кількість розв'язків, дорівнює $\frac{1}{a}$. Але тоді зрозуміло, що $m>0$ та $n>0$, та знайдене розв'язок $x_1=\frac{1}{a}$ і є шуканим.

11–8. В вершинах правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$, $n\ge 6$ з центром у точці O, треба розставити натуральні числа a_1, a_2, …, a_n, не усі однакові, таким чином, щоб для кожної вершини A_i існували дві вершини A_k та A_l, які симетричні відносно прямої OA_i, для яких справджується рівність: $a_i=\frac{1}{2}(a_k+a_l)$. Для яких $n\ge 6$ це можна зробити.

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> для усіх $n\ne 7$.

<u>Розв'язання.</u> Нехай нам вдалося розставити числа належним чином. Нехай $m=\min\limits_{j=\overline{1,\,n}} a_j$, $M=\max\limits_{j=\overline{1,\,n}} a_j$. Якщо $m=a_i=\frac{1}{2}(a_k+a_l)$, то $m=a_k=a_l$, таким чином найменших чисел має бути щонайменше 3, аналогічно для найбільших чисел. Для складеного $n\ge 6$ заповнення робиться досить просто. Нехай $n=pq,\ p,q>1$. Тоді ми розставимо у вершинах A_p, A_{2p}, …, A_{qp} числа m, а в усіх інших – числа M. Умови задачі, очевидно, виконуються, бо фактично вершини многокутника розбиваються на q правильних p-кутників, в кожному з яких у вершинах стоять однакові числа, при цьому число у кожній вершині такого многокутника є середнім арифметичним чисел у сусідніх вершинах цього ж многокутника, а це як раз відповідає умові задачі для загального n-кутника.

Залишається розглянути випадок простих n. Запишемо це число таким чином $n=4s+r$, де $r\in\{3,5\}$. Далі запропонуємо таку розстановку чисел в вершинах n-кутника.

Спочатку для $n=4s+3$. Для спрощення на рис. 5 замість вершини A_i будемо писати просто i, чорний кружечок – число m, білий кружечок – число M. Тепер для кожного кружечка i треба вказати пару кружечків такого ж кольору, розташованих симетрично (на рівній відстані від i, тобто з номерами $i+u$ та $i-u$ за модулем n). Якщо декілька однокольорових кружечків розташовані поруч у кількості більше або дорівнює 3, то треба шукати відповідні лише у крайніх в цій групі, бо для інших шукану пару складають два найближчих сусіди.

Таким чином в групі чорних треба знайти відповідну пару для кружечка за номером $s+3$ (внаслідок симетрії, аналогічна відповідь для $3s+2$). Очевидно, що пару для $s+3$ має складати 1 та симетричний їй кружечок. Якщо порахувати, то він має мати номер $2s+5$, щоб $s+3=\frac{1}{2}(1+2s+5)$. Таким чином він буде чорним за умов $2s+5 \le 3s+2$ або при $s \ge 3$.

Для груп білих внаслідок симетрії достатньо так само все розглянути для групи з номерами $2..s+3$. Для 2 пару утворюють $4s+3$ та 4. Тепер для $s+2$. Одним може бути кружечок з найменшим можливим номером $3s+3$. Другим має мати номер $(s+2)-(2s+1)=1-s \equiv 1-s+4s+3=3s+4$.

Окрема чорна вершина за номером 1 очевидно задовольняє умови, наприклад, пару симетричних для неї можуть скласти вершини $2s+2$ та $2s+3$.

Таким чином ця конструкція спрацьовує для $s \ge 3$, тобто $n=4s+3 \ge 15$.

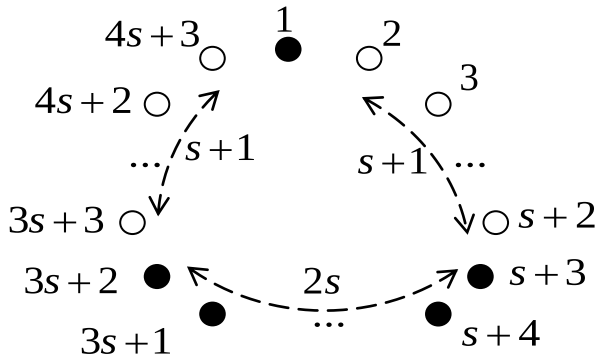

Рис. 5

Тепер $n=4s+5$ (рис. 6).

В групі чорних треба знайти відповідну пару для кружечка за номером $s+4$. Це буде 1 та симетричний кружечок, який має мати номер $2s+7$, щоб $s+4=\frac{1}{2}(1+2s+7)$. Таким чином він буде чорним за умов $2s+7 \le 3s+3$ або при $s \ge 4$.

Для груп білих для 2 пару утворюють $4s+5$ та 4. Тепер для $s+3$. Одним може бути кружечок з найменшим можливим номером $3s+4$. Другим має мати номер $(s+3)-(2s+1)=2-s \equiv 2-s+4s+5=3s+7$.

Окрема чорна вершина за номером 1 очевидно задовольняє умови, наприклад, пару симетричних для неї можуть скласти вершини $2s+3$ та $2s+4$.

Таким чином ця конструкція спрацьовує для $s \ge 3$, тобто $n=4s+5 \ge 21$.

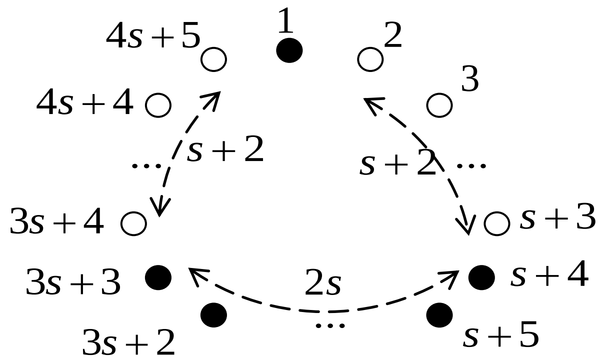

Рис. 6

Тобто залишається перевірити такі прості числа: 17, 13, 11 та 7.

Для перших трьох наведемо шукані конструкції.

На рис. 7 для $n=17$. Неочевидні пари для таких точок. $13=\frac{1}{2}(5+21) \equiv \frac{1}{2}(5+4)$, $5 \equiv \frac{1}{2}(13-3) \equiv \frac{1}{2}(13+14)$, $12=\frac{1}{2}(18+6) \equiv \frac{1}{2}(1+6)$, $6=\frac{1}{2}(1+11)$.

На рис. 8 для $n=13$. Неочевидні пари для таких точок. $3=\frac{1}{2}(-1+7) \equiv \frac{1}{2}(12+7)$, $6=\frac{1}{2}(9+3)$, $4 \equiv \frac{1}{2}(10-2) \equiv \frac{1}{2}(10+11)$, $5=\frac{1}{2}(10+0) \equiv \frac{1}{2}(10+13)$.

На рис. 9 для $n=11$. Чорні та білі точки розташовані симетрично, тому достатньо вказати пари лише для одного з кольорів. $1 \equiv \frac{1}{2}(5-3) \equiv \frac{1}{2}(5+8)$, $3=\frac{1}{2}(1+5)$, $8=\frac{1}{2}(2+14) \equiv \frac{1}{2}(2+3)$.

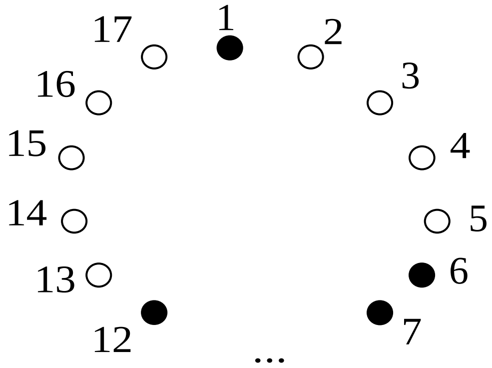

Рис. 7

Тут окремо стоїть точка сірого кольору, тому для числа x в цій точці має виконуватись умова $x=\frac{1}{2}(M+m)$, наприклад, $x=2$, $m=1$ та $M=3$.

Для $n=7$ відповідного прикладу не існує. Припустимо, що мінімальних не більше ніж максимальних. Тоді їх не більше 3. Зрозуміло, що 2 їх бути не може. Так само для їхнього розташування, якщо вони розташовані усі поруч, то немає для крайніх відповідних пар, якщо є два поруч, то для кожного з цієї пари немає пари. Якщо вони розташовані усі окремо, то це розташування через один, і для двох з них немає відповідної пари.

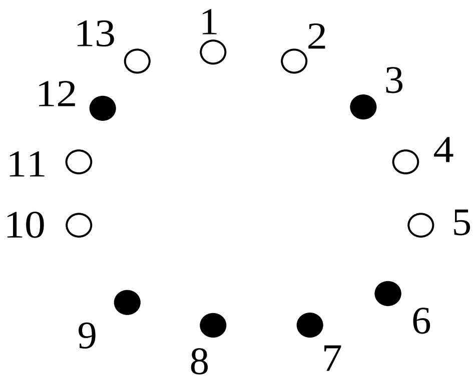

Рис. 8

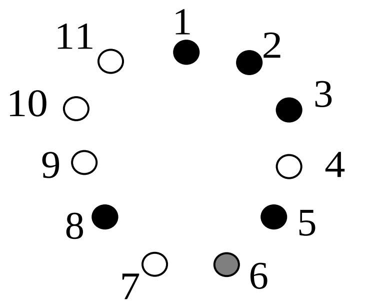

Рис. 9