

ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

10 клас

10–0. Скільки коренів на проміжку $(-180^\circ, 180^\circ)$ має рівняння $\sin 2x = 3$:

а) жодного; **б)** 180 коренів; **в)** 360 коренів; **г)** 2019 коренів?
(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

10–5. Знайдіть усі натуральні числа a та b , для яких число $2^{a!} + 2^{b!}$ є кубом натурального числа.

Нагадаємо, що для натурального числа n значення $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

10–6. Дано паралелограм $ABCD$. Коло, що проходить через вершини A та D вдруге перетинає прямі AB , BD , AC та CD у точках B_1 , B_2 , C_1 та C_2 відповідно. Прямі B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в точці K . Доведіть, що точка K рівновіддалена від прямих AB та CD .

10–7. У країні уряд вирішив встановити транспортне сполучення між містами залізницею або авіасполученням таким чином, щоб з кожного міста можна було безпосередньо дістатися не більше як до чотирьох інших міст. Доведіть, що уряд завжди може вибрати тип сполучення відповідних пар міст таким чином, щоб не існувало трьох міст, кожні два з яких з'єднані одним видом транспорту.

10–8. Для додатних чисел x, y, z , що задовольняють рівності $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$, доведіть, що справджується нерівність:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{4}(xyz-1).$$

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

10 клас

10–0. Скільки коренів на проміжку $(-180^\circ, 180^\circ)$ має рівняння $\sin 2x = 3$:

а) жодного; **б)** 180 коренів; **в)** 360 коренів; **г)** 2019 коренів?
(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

10–5. Знайдіть усі натуральні числа a та b , для яких число $2^{a!} + 2^{b!}$ є кубом натурального числа.

Нагадаємо, що для натурального числа n значення $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

10–6. Дано паралелограм $ABCD$. Коло, що проходить через вершини A та D вдруге перетинає прямі AB , BD , AC та CD у точках B_1 , B_2 , C_1 та C_2 відповідно. Прямі B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в точці K . Доведіть, що точка K рівновіддалена від прямих AB та CD .

10–7. У країні уряд вирішив встановити транспортне сполучення між містами залізницею або авіасполученням таким чином, щоб з кожного міста можна було безпосередньо дістатися не більше як до чотирьох інших міст. Доведіть, що уряд завжди може вибрати тип сполучення відповідних пар міст таким чином, щоб не існувало трьох міст, кожні два з яких з'єднані одним видом транспорту.

10–8. Для додатних чисел x, y, z , що задовольняють рівності $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$, доведіть, що справджується нерівність:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{4}(xyz-1).$$

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів