*Міністерство освіти і науки України*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
*Інститут модернізації змісту освіти*

# LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

## *Перший день*

## 11 клас

**11–0.** Якими будуть координати точки $B$ в просторі, що є серединою відрізку $OA$, де $O(0, 0, 0)$ , $A(2, 2, 2)$:

***а)*** $(1, 1, 1)$; ***б)*** $(6, 6, 6)$;***в)*** $(2019, 8, 8))$; ***г)*** $(2019, 2019, 2019)$?

*(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)*

**11–1.** Чи існують цілі числа $a<b<c<d$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}=\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}?$$

**11–2.** На початку гри ігрове поле – це прямокутник $2\times 2n$. Олеся та Андрій по черзі (розпочинає Олеся) роблять такі ходи – кожний з них від поточного ігрового поля відрізають квадрат розміру $1\times 1$ або $2\times 2$ за умови, що їх можна вирізати з ігрового поля на цей момент і після його відрізання ігрове поле залишиться *зв'язним*. Виграє той, хто відріже останній квадратик ігрового поля. Хто переможе в цій грі, за умови що усі хочуть виграти?

Фігура називається *зв'язною*, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.

**11–3.** Задані різні натуральні числа $a$ та $b$, більші від $1$.

***а)*** Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних $n$ число $s_n = a^n + b^{n+1}$ є складеним

***б)*** Доведіть, що існує нескінченно багато простих $p$ таких, що $s_n$ ділиться на $p$ при деякому натуральному $n$.

**11–4.** На колі з діаметром $AD$ взято точки $B$ і $C$ так, що $AB = AC$. На відрізку $BC$ обрано точку $P$ довільним чином, а точки $M$ і $N$ на відрізках $AB$ і $AC$ відповідно так, що чотирикутник $PMAN$ є паралелограмом. Нехай $PL$ – бісектриса трикутника $MPN$. Пряма $PD$ перетинає $MN$ у точці $Q$. Доведіть, що точки $B$, $Q$, $L$ та $C$ лежать на одному колі.

Черкаси, 12 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

*Міністерство освіти і науки України*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*
*Інститут модернізації змісту освіти*

# LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

## *Перший день*

## 11 клас

**11–0.** Якими будуть координати точки $B$ в просторі, що є серединою відрізку $OA$, де $O(0,0,0)$, $A(2,2,2)$:

***а)*** $(1,1,1)$; ***б)*** $(6,6,6)$; ***в)*** $(2019,8,8))$; ***г)*** $(2019,2019,2019)$?

*(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)*

**11–1.** Чи існують цілі числа $a<b<c<d$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}=\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{d}?$$

**11–2.** На початку гри ігрове поле – це прямокутник $2\times 2n$. Олеся та Андрій по черзі (розпочинає Олеся) роблять такі ходи – кожний з них від поточного ігрового поля відрізають квадрат розміру $1\times 1$ або $2\times 2$ за умови, що їх можна вирізати з ігрового поля на цей момент і після його відрізання ігрове поле залишиться *зв'язним*. Виграє той, хто відріже останній квадратик ігрового поля. Хто переможе в цій грі, за умови що усі хочуть виграти?

Фігура називається *зв'язною*, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.

**11–3.** Задані різні натуральні числа $a$ та $b$, більші від $1$.

***а)*** Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних $n$ число $s_n=a^n+b^{n+1}$ є складеним

***б)*** Доведіть, що існує нескінченно багато простих $p$ таких, що $s_n$ ділиться на $p$ при деякому натуральному $n$.

**11–4.** На колі з діаметром $AD$ взято точки $B$ і $C$ так, що $AB=AC$. На відрізку $BC$ обрано точку $P$ довільним чином, а точки $M$ і $N$ на відрізках $AB$ і $AC$ відповідно так, що чотирикутник $PMAN$ є паралелограмом. Нехай $PL$ – бісектриса трикутника $MPN$. Пряма $PD$ перетинає $MN$ у точці $Q$. Доведіть, що точки $B$, $Q$, $L$ та $C$ лежать на одному колі.

Черкаси, 12 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів