

## ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Другий день

#### 9 клас

**9–0.** Скільки пар цілих чисел  $(x, y)$  задовольняють рівності  $x^4 + y^2 + 2019 = 0$ :

**а)** жодної;    **б)** 6 пар;    **в)** 1000 пар;    **г)** 2019 пар?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**9–5.** На дошці записані натуральні числа  $a < b$ . На кожному кроці два записані на дошці числа витирають, а замість них записують їх суму та модуль різниці. В деякий момент на дошці з'явилося записаним число 2019. При якому найменшому можливому  $b$  це можливо?

**9–6.** Доведіть, що для довільних дійсних  $x, y, z$  справджується нерівність:

$$x^2(3y^2 + 3z^2 - 2yz) \geq yz(2xy + 2xz - yz).$$

Для яких трійок може досягатися рівність?

**9–7.** Задані натуральні числа  $a, b, c$ . Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число  $k$ , для якого  $\text{НСД}(a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab) > 1$ .

**9–8.** Гострокутний трикутник  $ABC$  вписано в коло  $w$  з центром у точці  $O$ . Продовження його висот, що проведені з вершин  $A$  та  $C$ , вдруге перетинають  $w$  в точках  $A_0$  та  $C_0$  відповідно. Пряма  $A_0C_0$  перетинає сторони  $AB$  та  $BC$  у точках  $A_1$  та  $C_1$  відповідно. Точки  $A_2$  та  $C_2$  на стороні  $AC$  такі, що  $A_2O \parallel BC$ , а  $C_2O \parallel AB$ . Нехай  $H$  – ортоцентр  $\triangle ABC$ ,  $T$  – точка перетину  $A_1A_2$  і  $C_1C_2$ . Доведіть, що  $HT \parallel AC$ .

Черкаси, 13 березня 2019 р.

## ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Другий день

#### 9 клас

**9–0.** Скільки пар цілих чисел  $(x, y)$  задовольняють рівності  $x^4 + y^2 + 2019 = 0$ :

**а)** жодної;    **б)** 6 пар;    **в)** 1000 пар;    **г)** 2019 пар?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**9–5.** На дошці записані натуральні числа  $a < b$ . На кожному кроці два записані на дошці числа витирають, а замість них записують їх суму та модуль різниці. В деякий момент на дошці з'явилося записаним число 2019. При якому найменшому можливому  $b$  це можливо?

**9–6.** Доведіть, що для довільних дійсних  $x, y, z$  справджується нерівність:

$$x^2(3y^2 + 3z^2 - 2yz) \geq yz(2xy + 2xz - yz).$$

Для яких трійок може досягатися рівність?

**9–7.** Задані натуральні числа  $a, b, c$ . Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число  $k$ , для якого  $\text{НСД}(a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab) > 1$ .

**9–8.** Гострокутний трикутник  $ABC$  вписано в коло  $w$  з центром у точці  $O$ . Продовження його висот, що проведені з вершин  $A$  та  $C$ , вдруге перетинають  $w$  в точках  $A_0$  та  $C_0$  відповідно. Пряма  $A_0C_0$  перетинає сторони  $AB$  та  $BC$  у точках  $A_1$  та  $C_1$  відповідно. Точки  $A_2$  та  $C_2$  на стороні  $AC$  такі, що  $A_2O \parallel BC$ , а  $C_2O \parallel AB$ . Нехай  $H$  – ортоцентр  $\triangle ABC$ ,  $T$  – точка перетину  $A_1A_2$  і  $C_1C_2$ . Доведіть, що  $HT \parallel AC$ .

Черкаси, 13 березня 2019 р.