

## ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 10 клас

**10–0.** Яке з наведених рівнянь прямих  $y = kx + b$  задає пряму  $OA$ , де  $O(0, 0)$  та  $A(1, 1)$ :

**а)**  $y = x$ ;    **б)**  $y = 2x + 2019$ ;    **в)**  $y = -2019x$ ;    **г)**  $y = 2019$ ?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**10–1.** З натуральних чисел  $2, 3, 4, \dots, 2019$  якимось чином утворюють 1009 правильних дробів, далі серед цих дробів вибирають найбільший. Яке найменше значення може мати цей найбільший дріб при усіх можливих побудовах таких дробів?

**10–2.** Андрій та Олеся по черзі вирізають по лініях сітки з прямокутника  $4000 \times 2019$  квадрати якихось розмірів. Після ходу кожного обов'язково має залишитися зв'язна фігура. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за правильної гри обох гравців, якщо розпочинає Олеся?

*Фігура називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.*

**10–3.** В гострокутному трикутнику  $ABC$  вписане коло з центром у точці  $I$  дотикається до сторін  $AB$  та  $BC$  у точках  $C_1$  та  $A_1$  відповідно. Нехай  $M$  – середина  $AC$ ,  $N$  – середина дуги  $ABC$  описаного кола трикутника  $ABC$ ,  $P$  – проекція точки  $M$  на  $A_1C_1$ . Доведіть, що точки  $I$ ,  $P$  та  $N$  лежать на одній прямій.

**10–4.** Задані різні натуральні числа  $a$  та  $b$ , більші від 1.

**а)** Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних  $n$  число  $s_n = a^n + b^{n+1}$  є складеним

**б)** Доведіть, що існує нескінченно багато простих  $p$  таких, що  $s_n$  ділиться на  $p$  при деякому натуральному  $n$ .

Черкаси, 12 березня 2019 р.

## ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 10 клас

**10–0.** Яке з наведених рівнянь прямих  $y = kx + b$  задає пряму  $OA$ , де  $O(0, 0)$  та  $A(1, 1)$ :

**а)**  $y = x$ ;    **б)**  $y = 2x + 2019$ ;    **в)**  $y = -2019x$ ;    **г)**  $y = 2019$ ?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**10–1.** З натуральних чисел  $2, 3, 4, \dots, 2019$  якимось чином утворюють 1009 правильних дробів, далі серед цих дробів вибирають найбільший. Яке найменше значення може мати цей найбільший дріб при усіх можливих побудовах таких дробів?

**10–2.** Андрій та Олеся по черзі вирізають по лініях сітки з прямокутника  $4000 \times 2019$  квадрати якихось розмірів. Після ходу кожного обов'язково має залишитися зв'язна фігура. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за правильної гри обох гравців, якщо розпочинає Олеся?

*Фігура називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.*

**10–3.** В гострокутному трикутнику  $ABC$  вписане коло з центром у точці  $I$  дотикається до сторін  $AB$  та  $BC$  у точках  $C_1$  та  $A_1$  відповідно. Нехай  $M$  – середина  $AC$ ,  $N$  – середина дуги  $ABC$  описаного кола трикутника  $ABC$ ,  $P$  – проекція точки  $M$  на  $A_1C_1$ . Доведіть, що точки  $I$ ,  $P$  та  $N$  лежать на одній прямій.

**10–4.** Задані різні натуральні числа  $a$  та  $b$ , більші від 1.

**а)** Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних  $n$  число  $s_n = a^n + b^{n+1}$  є складеним

**б)** Доведіть, що існує нескінченно багато простих  $p$  таких, що  $s_n$  ділиться на  $p$  при деякому натуральному  $n$ .

Черкаси, 12 березня 2019 р.