Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

8 клас

8–0. Скільки коренів має рівняння $x^4 + 1 = 0$:

а) жодного; ***б)*** 4 корені; ***в)*** 100 коренів; ***г)*** 2019 коренів?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

8–5. Відомо, що ненульові дійсні числа x, y, z задовольняють умову $xy + yz + zx = 0$. Чому може дорівнювати значення виразу

$$\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy}?$$

8–6. У кожного з гравців – Андрія та Олесі – є набір з 2019 карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 2019 (кожне число рівно один раз у кожного з гравців). Гра відбувається за такими правилами. На початку гри на столі лежить деяка картка з числом $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$. Після цього гравці по черзі (розпочинає Андрій) міняють одну із своїх карток на ту, що лежить на даний момент на столі. При цьому Андрій може міняти картку на столі на ту свою, на якій записане число більше, ніж число, що записане на картці на столі, а Олеся – на свою картку з меншим записаним числом ніж на картці на столі. Той, хто не може зробити хід, вважається тим, хто програв. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне до перемоги?

8–7. Дано трикутник ABC. На сторонах AB, BC та AC вибрали точки C_1, A_1 та B_1 відповідно. Нехай K – проекція B_1 на пряму A_1C_1. На променях B_1A та B_1C вибрали точки M та N відповідно так, що $\angle B_1A_1C_1 = 2\angle KNB_1$ та $\angle B_1C_1A_1 = 2\angle KMB_1$. Доведіть, що довжина відрізку MN не більша за периметр трикутника $\Delta A_1B_1C_1$.

8–8. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого $НСД(a^k + bc,\ b^k + ca,\ c^k + ab) > 1$.

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

8 клас

8–0. Скільки коренів має рівняння $x^4 + 1 = 0$:

а) жодного; ***б)*** 4 корені; ***в)*** 100 коренів; ***г)*** 2019 коренів?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

8–5. Відомо, що ненульові дійсні числа x, y, z задовольняють умову $xy + yz + zx = 0$. Чому може дорівнювати значення виразу

$$\frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy}?$$

8–6. У кожного з гравців – Андрія та Олесі – є набір з 2019 карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 2019 (кожне число рівно один раз у кожного з гравців). Гра відбувається за такими правилами. На початку гри на столі лежить деяка картка з числом $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$. Після цього гравці по черзі (розпочинає Андрій) міняють одну із своїх карток на ту, що лежить на даний момент на столі. При цьому Андрій може міняти картку на столі на ту свою, на якій записане число більше, ніж число, що записане на картці на столі, а Олеся – на свою картку з меншим записаним числом ніж на картці на столі. Той, хто не може зробити хід, вважається тим, хто програв. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне до перемоги?

8–7. Дано трикутник ABC. На сторонах AB, BC та AC вибрали точки C_1, A_1 та B_1 відповідно. Нехай K – проекція B_1 на пряму A_1C_1. На променях B_1A та B_1C вибрали точки M та N відповідно так, що $\angle B_1A_1C_1 = 2\angle KNB_1$ та $\angle B_1C_1A_1 = 2\angle KMB_1$. Доведіть, що довжина відрізку MN не більша за периметр трикутника $\Delta A_1B_1C_1$.

8–8. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого $НСД(a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab) > 1$.

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів