

ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–0. Чому дорівнює похідна функції $y = x^3$:

а) $3x^2$; б) $2019x^{2019}$; в) $\sin x$; г) 2^x ?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

11–5. Знайдіть усі натуральні числа a , b та c , для яких число $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ є кубом натурального числа.

Нагадаємо, що для натурального числа n значення $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

11–6. На колі розставлені 2019 точок $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$, що утворюють правильний 2019-кутник $A_1A_2\dots A_{2019}$. Олеся та Андрій по черзі роблять ходи, першою ходить Олеся. За певними правилами Олеся своїм ходом утворює тупокутний трикутник, а Андрій – гострокутний. Правила утворення трикутників такі. На початку відміченими вважаються вершини A_1 та A_2 . На першому своєму кроці Олеся відмічає невідмічену вершину A_i так, щоб утворився тупокутний $\triangle A_1A_2A_i$, і вершина A_i стає відміченою. Нехай надалі своїм черговим ходом Олеся (Андрій) відмітили не відмічену раніше вершину A_j утворили тупокутний (гострокутний) $\triangle A_kA_lA_j$. Тоді наступним ходом Андрій (Олеся) може відмітити таку не відмічену вершину A_m , для якої утворюється гострокутний (тупокутний) $\triangle A_nA_jA_m$, де $n = k$ або $n = l$. Програє той, хто не зможе за правилами зробити черговий хід, тобто відмітити вершину, щоб утворився належний трикутник. Хто переможе за правильної гри обох учасників?

11–7. Знайдіть всі функції $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ для яких для довільних додатних чисел x, y справджується рівність:

$$f(f(x) + y) = f(f(x)) + 2yf(x) - f(y) + 2y^2 + 1.$$

11–8. Є група з $2n$ людей, серед яких є пари знайомих. Відомо, що кожна людина серед цієї групи має рівно $k \geq 1$ знайомих (якщо «А» знайомий з «Б», то й навпаки, «Б» знайомий з «А»). Для яких k цю групу завжди можна розбити на дві підгрупи по n людей таким чином, щоб у обох підгрупах кожна людина мала принаймні одного знайомого?

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

ЛІХ Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–0. Чому дорівнює похідна функції $y = x^3$:

а) $3x^2$; б) $2019x^{2019}$; в) $\sin x$; г) 2^x ?

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

11–5. Знайдіть усі натуральні числа a , b та c , для яких число $2^{a!} + 2^{b!} + 2^{c!}$ є кубом натурального числа.

Нагадаємо, що для натурального числа n значення $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

11–6. На колі розставлені 2019 точок $A_1, A_2, \dots, A_{2019}$, що утворюють правильний 2019-кутник $A_1A_2\dots A_{2019}$. Олеся та Андрій по черзі роблять ходи, першою ходить Олеся. За певними правилами Олеся своїм ходом утворює тупокутний трикутник, а Андрій – гострокутний. Правила утворення трикутників такі. На початку відміченими вважаються вершини A_1 та A_2 . На першому своєму кроці Олеся відмічає невідмічену вершину A_i так, щоб утворився тупокутний $\triangle A_1A_2A_i$, і вершина A_i стає відміченою. Нехай надалі своїм черговим ходом Олеся (Андрій) відмітили не відмічену раніше вершину A_j утворили тупокутний (гострокутний) $\triangle A_kA_lA_j$. Тоді наступним ходом Андрій (Олеся) може відмітити таку не відмічену вершину A_m , для якої утворюється гострокутний (тупокутний) $\triangle A_nA_jA_m$, де $n = k$ або $n = l$. Програє той, хто не зможе за правилами зробити черговий хід, тобто відмітити вершину, щоб утворився належний трикутник. Хто переможе за правильної гри обох учасників?

11–7. Знайдіть всі функції $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ для яких для довільних додатних чисел x, y справджується рівність:

$$f(f(x) + y) = f(f(x)) + 2yf(x) - f(y) + 2y^2 + 1.$$

11–8. Є група з $2n$ людей, серед яких є пари знайомих. Відомо, що кожна людина серед цієї групи має рівно $k \geq 1$ знайомих (якщо «А» знайомий з «Б», то й навпаки, «Б» знайомий з «А»). Для яких k цю групу завжди можна розбити на дві підгрупи по n людей таким чином, щоб у обох підгрупах кожна людина мала принаймні одного знайомого?

Черкаси, 13 березня 2019 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів