

## LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Другий день

#### 9 клас

9–0. Яка з наведених пар чисел  $(x; y)$  є розв'язком системи рівнянь:  $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ ?

а)  $(1; 1)$ ; б)  $(0; 0)$ ; в)  $(-1; -1)$ ; г)  $(2018; 2018)$ ; д)  $(-2018; -2018)$ .

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

9–5. Для натурального числа  $n$  позначимо через  $S(n)$  суму його цифр. Серед усіх пар натуральних чисел  $(n, m)$ , що задовольняють рівність  $S(n) \cdot S(n+1) \cdot \dots \cdot S(n+m) = 2018$  знайдіть таку, для якої сума  $n+m$  приймає найменше можливе значення.

9–6. В трикутнику  $ABC$  позначили точки  $M_1, M_2, M_3$  – середини сторін  $BC, AC, AB$  відповідно. Точка  $K$  симетрична до  $M_2$  відносно прямої  $BC$ ,  $AH$  – висота трикутника  $ABC$ . Доведіть, що пряма  $KM_3$  ділить навпіл відрізок  $HM_1$ .

9–7. Для додатних чисел  $x, y, z$  доведіть нерівність:

$$\frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) \geq xyz + \frac{4}{9}(x+y+z)(x-z)^2.$$

9–8. Кругла башта має 16 дверей, за кожною з яких схована скриня з золотом капітана Флінта. Ці двері розташовані по периметру башти на рівних відстанях між сусідніми, та занумеровані за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 16. До башти підійшли 16 піратів, кожен з яких має один ключ, причому всі ключі занумеровані числами від 1 до 16. Відомо, що ключ з номером  $n$  відкриває двері з номером  $m$  тоді і тільки тоді, коли  $m : n$ . Пірати стоять рівно по одному у кожній двері, але вони не знають номера двері, біля якої вони опинилися. Джим Хокінс знає у якого пірата який ключ і хоче, щоб ті змогли забрати якомога меншу кількість скринь з золотом. Джим може повернути башту так, щоб двері перед піратами були розташовані так, як він того бажає – але все одно номери дверей йдуть послідовно по колу за рухом годинникової стрілки 1–16 починаючи з деякої. Яку максимальну кількість скринь із золотом зможуть напевно забрати пірати за таких умов?

Одеса, 20 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин  
Кожна задача оцінюється в 7 балів