

## LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 10 клас

**10–0.** Яка з наведених множин є множиною розв'язків рівняння  $(x-2)(x^2+2)=0$ ?

**а)**  $\{2\}$ ;    **б)**  $\{0, -2\}$ ;    **в)**  $\{0, 1\}$ ;    **г)**  $\{2018\}$ ;    **д)**  $\{-2, -1, 0, 1\}$ ;

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**10–1.** Розв'яжіть в натуральних числах  $x, y, p, n, k$  систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + y = p^k, \\ 5y + x = p^{k+n}. \end{cases}$$

**10–2.** Дано рівнобедрений тупокутний трикутник  $ABC$  з вершиною у точці  $B$ . Серединний перпендикуляр до сторони  $BC$  перетинає прямі  $AC$  і  $AB$  в точках  $K$  і  $M$  відповідно. Доведіть, що точка, симетрична точці  $A$  відносно прямої  $BK$ , лежить на прямій  $CM$ .

**10–3.** Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на  $4n$  попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Андрій вибирає собі 1 шматочок, далі Олеся вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після її ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торта, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом Андрій забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торта, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Чи зможе хтось гарантовано взяти собі більше половини від усього торта, якщо:

**а)** розрізання торта на сектори проводить Олеся;

**б)** розрізання торта на сектори проводить Андрій, але своїм першим ходом він не має права брати найбільший за вагою шматочок?

**10–4.** Знайдіть усі функції  $f:[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , які для усіх невід'ємних  $x, y$  задовольняють рівності:  $f(f(x) + f(y)) = xuf(x+y)$ .

Одеса, 20 березня 2018 р.

## LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 10 клас

**10–0.** Яка з наведених множин є множиною розв'язків рівняння  $(x-2)(x^2+2)=0$ ?

**а)**  $\{2\}$ ;    **б)**  $\{0, -2\}$ ;    **в)**  $\{0, 1\}$ ;    **г)**  $\{2018\}$ ;    **д)**  $\{-2, -1, 0, 1\}$ ;

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**10–1.** Розв'яжіть в натуральних числах  $x, y, p, n, k$  систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + y = p^k, \\ 5y + x = p^{k+n}. \end{cases}$$

**10–2.** Дано рівнобедрений тупокутний трикутник  $ABC$  з вершиною у точці  $B$ . Серединний перпендикуляр до сторони  $BC$  перетинає прямі  $AC$  і  $AB$  в точках  $K$  і  $M$  відповідно. Доведіть, що точка, симетрична точці  $A$  відносно прямої  $BK$ , лежить на прямій  $CM$ .

**10–3.** Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на  $4n$  попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обом гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Андрій вибирає собі 1 шматочок, далі Олеся вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після її ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торта, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом Андрій забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торта, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Чи зможе хтось гарантовано взяти собі більше половини від усього торта, якщо:

**а)** розрізання торта на сектори проводить Олеся;

**б)** розрізання торта на сектори проводить Андрій, але своїм першим ходом він не має права брати найбільший за вагою шматочок?

**10–4.** Знайдіть усі функції  $f:[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , які для усіх невід'ємних  $x, y$  задовольняють рівності:  $f(f(x) + f(y)) = xuf(x+y)$ .

Одеса, 20 березня 2018 р.