Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–0. Скільки усього ребер (бічних та в основі) має трикутна піраміда?

а) 6; ***б)*** 10; ***в)*** 12; ***г)*** 24; ***д)*** 30°.

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

11–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані в одну лінію, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

11–6. Послідовність (x_n) задається умовами $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{x_n}\right)$, $n \in N$. Доведіть, що існує a, для якого послідовність (x_n) містить рівно 2018 різних членів. *(Якщо деякий член послідовності дорівнює 0, то послідовність на цьому елементі обривається.)*

11–7. Задані N натуральних чисел такі, що найбільші спільні дільники усіх непорожніх наборів цих чисел (по одному, два, три, тощо) різні. Яка найменша кількість різних простих дільників може бути у добутку усіх N чисел?

11–8. Дано гострокутний трикутник ABC, AA_1 та CC_1 – його бісектриси, I – центр вписаного кола, M і N – середини відрізків AI та CI відповідно. Всередині трикутників AC_1I та A_1CI відповідно вибрали точки K і L так, що $\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$, $\angle CLN = \angle IAC$. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників KIL та ABC рівні.

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

11 клас

11–0. Скільки усього ребер (бічних та в основі) має трикутна піраміда?
а) 6; ***б)*** 10; ***в)*** 12; ***г)*** 24; ***д)*** $30°$.
(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

11–5. На острів насуває ескадра, в якій є 10 потужних есмінців, а також ще 20 невеликих катерів. Всі вони вишикувані в одну лінію, причому відстані між сусідніми кораблями рівні, і саме так наближаються до острову. Острів захищають два торпедоносних катери, у кожного з яких є рівно по 10 торпед. Пускові установки в них налаштовані так, що перший може випустити одночасно усі 10 торпед по сусіднім 10 цілям, а другий усі 10 торпед по 10 цілям, що йдуть через одну. Відомо, що вони стріляють одночасно (тобто в деякі цілі можуть влучити одночасно дві торпеди). Яка найбільша кількість есмінців може напевно залишитися цілою, за будь-яких дій оборони острова?

11–6. Послідовність (x_n) задається умовами $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n - \dfrac{1}{x_n}\right)$, $n \in N$.

Доведіть, що існує a, для якого послідовність (x_n) містить рівно 2018 різних членів. *(Якщо деякий член послідовності дорівнює 0, то послідовність на цьому елементі обривається.)*

11–7. Задані N натуральних чисел такі, що найбільші спільні дільники усіх непорожніх наборів цих чисел (по одному, два, три, тощо) різні. Яка найменша кількість різних простих дільників може бути у добутку усіх N чисел?

11–8. Дано гострокутний трикутник ABC, AA_1 та CC_1 – його бісектриси, I – центр вписаного кола, M і N – середини відрізків AI та CI відповідно. Всередині трикутників AC_1I та A_1CI відповідно вибрали точки K і L так, що $\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$, $\angle CLN = \angle IAC$. Доведіть, що радіуси описаних кіл трикутників KIL та ABC рівні.

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години 5 хвилин
Кожна задача оцінюється в 7 балів