

## LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 11 клас

**11–0.** Яке з наведених чисел задовольняє нерівності:  $\sqrt{x} > 1$ ?

**а)** 2018;    **б)** 0;    **в)**  $-1$ ;    **г)**  $-2$ ;    **д)**  $-2018$ .

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**11–1.** Знайдіть усі трійки попарно різних натуральних чисел  $(a, b, c)$ , які задовольняють умову: число  $2a - 1$  ділиться націло на  $b$ , число  $2b - 1$  ділиться націло на  $c$  і число  $2c - 1$  ділиться націло на  $a$ .

**11–2.** У гострокутному трикутнику  $ABC$  проведено висоту  $AN$  і медіану  $AM$ . На прямих  $AB$  і  $AC$  взято точки  $X$  та  $Y$  відповідно так, що  $AX = XC$  і  $AY = YB$ . Доведіть, що середина відрізка  $XY$  рівновіддалена від точок  $N$  і  $M$ .

**11–3.** Знайдіть усі функції  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , які для усіх невід'ємних  $x, y$  задовольняють рівності:

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y).$$

**11–4.** Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на  $2n$ ,  $n > 1$  попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обоим гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає собі 1 шматочок, далі Андрій вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після його ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торта, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом один з гравців забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торта, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Для яких  $n$  Олеся може так розрізати торт на шматочки, щоб виграти, якщо своїм першим ходом вона бере найменший шматочок?

Одеса, 20 березня 2018 р.

## LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

### Перший день

#### 11 клас

**11–0.** Яке з наведених чисел задовольняє нерівності:  $\sqrt{x} > 1$ ?

**а)** 2018;    **б)** 0;    **в)**  $-1$ ;    **г)**  $-2$ ;    **д)**  $-2018$ .

(В роботі написати лише пункт вірної відповіді без пояснень)

**11–1.** Знайдіть усі трійки попарно різних натуральних чисел  $(a, b, c)$ , які задовольняють умову: число  $2a - 1$  ділиться націло на  $b$ , число  $2b - 1$  ділиться націло на  $c$  і число  $2c - 1$  ділиться націло на  $a$ .

**11–2.** У гострокутному трикутнику  $ABC$  проведено висоту  $AH$  і медіану  $AM$ . На прямих  $AB$  і  $AC$  взято точки  $X$  та  $Y$  відповідно так, що  $AH = XC$  і  $AY = YB$ . Доведіть, що середина відрізка  $XY$  рівновіддалена від точок  $H$  і  $M$ .

**11–3.** Знайдіть усі функції  $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , які для усіх невід'ємних  $x, y$  задовольняють рівності:

$$f(f(x) + f(y)) = xyf(x + y).$$

**11–4.** Два гравці – Андрій та Олеся грають у таку гру. На столі лежить круглий торт, який один з них розрізає на  $2n$ ,  $n > 1$  попарно різних за вагою секторів (шматочків). Вага кожного шматочка відома обоим гравцям. Після цього вони вибирають собі шматочки за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає собі 1 шматочок, далі Андрій вибирає собі 2 шматочки, але таким чином, щоб шматочки, які залишаться на столі після його ходу, утворювали сектор. Далі вони по черзі беруть по 2 шматочки так, щоб після кожного ходу шматочки торта, що залишилися на столі, утворювали сектор. Останнім ходом один з гравців забирає останній шматочок. Кожний з гравців прагне, щоб загальна вага частини торта, яку він взяв, була більшою, ніж у супротивника. Для яких  $n$  Олеся може так розрізати торт на шматочки, щоб виграти, якщо своїм першим ходом вона бере найменший шматочок?

Одеса, 20 березня 2018 р.