*Міністерство освіти і науки України*
*Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

# LV Всеукраїнська олімпіада юних математиків

## Умови та розв'язання задач другого дня

ВІЛЬНИЙ - НЕ СТАНЕ РАБОМ !!!
Небо, розбурхане хмарами чорними,
Скроплює кров'ю сніги,
Йдуть пошматовані - але не скорені
В бій, що лиш їм до снаги.
Їм, чиї "Градами" вирвані рани
В небо безмовно кричать,
Їм, що не знають стахів, ні вагання,
З смертю плече до плеча.
Нині Ви стали на битву з монголами,
Що все довкруж спопеля.
Де ж Ви берете ту силу, соколики?
Мужність така звідкіля?...
Сили нерівні - та дух Ваш, мов криця,
Ви ж бо - у ріднім краю,
Тим, хто з мечем йде на нас - не проститься
Й місця не буде в раю!
Кануть у безвість кати безіменними,
Вільний - не стане рабом,
Ми - під своїми воюєм знаменами,
З нами є Правда та Бог !!!

*Наталія Крісман*

## 8 клас

**8.5.** Відомо, що для чисел $a, b, c$ справджується умова: середнє арифметичне чисел $a, b$ дорівнює числу $c$, тобто $c=\frac{1}{2}(a+b)$, а середнє гармонічне чисел $a, c$ дорівнює числу $b$, тобто $b=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$. Чи обов'язково числа $a, b, c$ рівні між собою?

*(Рубльов Богдан)*

***Відповідь:*** не обов'язково.

***Розв'язання.*** Перепишемо умову про середнє гармонічне: $b=\frac{2ac}{a+c}$, а тепер сюди підставимо замість $c=\frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$2a\cdot\tfrac{a+b}{2}=b(a+\tfrac{a+b}{2}) \Leftrightarrow a^2+ab=ba+\tfrac{ab+b^2}{2} \Leftrightarrow 2a^2=ba+b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+b)=0.$$

Виберемо, наприклад, $a=2$, тобі $b=-4$, звідси $c=-1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

**8.6.** У трапеції $ABCD$ з перпендикулярними діагоналями точки $P, N, Q, M$ – середини сторін $AB, BC, CD, DA$ відповідно. На основі $CD$ існує точка $L$, яка відмінна від точки $Q$, для якої кут $MLN$ – прямий. Знайдіть величину кута $LPA$.

*(Рубльов Богдан)*

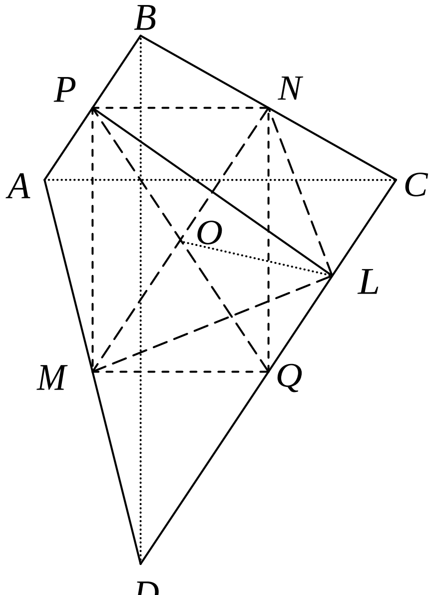



**Рис. 11**

***<u>Відповідь</u>:*** $90^\circ$.

***<u>Розв'язання</u>.*** За теоремою Варіньона чотирикутник $MPNQ$ є паралелограмом, причому його сторони паралельні діагоналям трапеції $ABCD$, а тому він є прямокутником (рис. 11). Нехай $O$ – точка перетину $AC$ і $BD$. Тоді з властивості прямокутного $\Delta MNL$ маємо $OL = OM = ON \Rightarrow OL = OP = OQ$, тому $\Delta PQL$ – прямокутний. Тобто $PL \perp LQ$, а оскільки $AB \| CD$, то $PL \perp AB$.

**8.7.** Знайдіть усі такі трійки простих чисел $(p, q, r)$, що задовольняють рівність

$$\frac{q}{p-1} + \frac{r}{p+1} = \frac{q+r+1}{p}.$$

*(Ясінський В'ячеслав)*

***<u>Відповідь</u>***: $p = q = 2, r = 3$ та $p = q = 3, r = 2$.

***<u>Розв'язання</u>***. Перепишемо нашу рівність у такий спосіб:

$$\frac{q}{p-1} - \frac{q}{p} = \frac{r}{p} - \frac{r}{p+1} + \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{q}{p(p-1)} = \frac{r}{p(p+1)} + \frac{1}{p} \Leftrightarrow \frac{q}{p-1} = \frac{r}{p+1} + 1 \Leftrightarrow q = \frac{(p-1)r}{p+1} + p - 1 \Leftrightarrow$$

$$q = p + r - 1 - \frac{2r}{p+1}. \qquad \textbf{(1)}$$

Оскільки $p, q, r$ – прості, то число $\frac{2r}{p+1}$ – натуральне. Число $2r$ має всього чотири дільники: $1$, $2$, $r$ та $2r$. Оскільки $p+1 \ge 3$, тому можливі лише два випадки: $p+1 = r$ або $p+1 = 2r$.

1) Нехай $p+1 = r$, тобто $p = r-1$. Оскільки єдина пара послідовних простих чисел – це 2 та 3, то $p = 2$ та $r = 3$. Тоді з **(1)** знаходимо, що $q = 2$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p = q = 2, r = 3$ є шуканою.

2) Нехай $p+1 = 2r$, тобто $p = 2r-1$. Тоді з **(1)** знаходимо, що $q = 3r - 3 \,\vdots\, 3$, оскільки $q$ – просте, то $q = 3$. Далі, послідовно знаходимо, що $r = 2, p = 3$. Перевірка показує, що трійка простих чисел $p = q = 3, r = 2$ є шуканою.

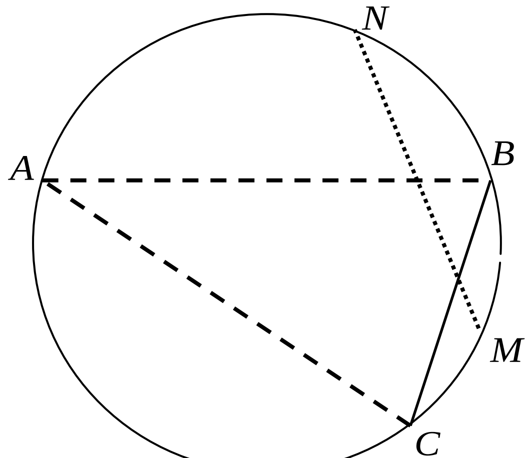
**8.8.** На колі розташовані $N$ точок. Андрій та Олеся грають у таку гру. Першим ходить Андрій. Вони по черзі з'єднують дві із заданих точок хордою, якщо вона не перетинає жодну з раніше проведених хорд у внутрішній точці. Перемагає той, після ходу якого утвориться трикутник з проведених хорд. Хто перемагає при правильній грі обох суперників, якщо

***а)*** $N = 14$; ***б)*** $N = 15$?

*(Рубльов Богдан)*

***<u>Відповідь</u>:*** ***а)*** перемагає Андрій, ***б)*** перемагає Олеся.

***<u>Розв'язання</u>.*** Зрозуміло, що програє той, хто вимушений провести хорду з точки, з якої вже проведена інша хорда (рис. 12). Наприклад, один гравець проводить $AC$, а хорда $AB$ вже була проведена раніше (будемо вважати, що з точки $A$ більше не виходить жодна хорда). Тоді інший гравець просто проведе хорду $BC$ і переможе. Зрозуміло, що цю хорду провести можна, бо якщо б $BC$




**<u>Рис. 12</u>**

перетинала деяку іншу хорду, наприклад, $MN$, то одна з точок, нехай $M$, належить дузі $\cup BC$, а інша – ні. Тобто, точка $N$ попадає або на дугу $\cup AB$, і тоді $MN$ перетинає $AB$, або на дугу $\cup AC$, і тоді $MN$ перетинає $AC$.

Таким чином гра триватиме доти, доки один з гравців не буде вимушений провести другу хорду з однієї точки і програє. Тобто спочатку обидва гравці будуть проводити лише хорди, які з'єднують «вільні» точки, тобто точки, з яких не проведена жодна хорда. У кожний момент усі вільні точки розбиваються на «групи», всередині кожної з яких можна з'єднати будь-які дві точки. При цьому подальше проведення хорд всередині групи не залежить від інших груп і не впливає на інші групи. Тобто позицію після кожного ходу можна записати списком груп, за кількістю вільних точок в ній. Якщо наступна хорда проводиться в групі, що містила $m$ точок, то на місті старої групи з'являються дві групи, що містять $m_1$ та $m_2$ вершин, де $m_1 + m_2 = m - 2$ (при цьому одна чи обидві групи можуть бути порожніми). Таким чином початкову позицію для $N = 15$ можна записати як $(15)$, а після проведення першої хорди може утворитись, наприклад, така позиція $(10;\ 3)$, $(8;\ 5)$, або $(13;\ 0)$ тощо. Після наступного ходу будуть вже 3 групи, при цьому групи з $(0)$ та $(1)$ можна не враховувати, бо в них не можна провести хорду, яка не веде до поразки.

Покажемо тепер прості властивості груп точок, які пришвидшать процес аналізу поточної ситуації.

*Властивість 1*. У групі з 3 точок завжди можна провести 1 хорду, у групі з 5 точок завжди можна провести 2 хорди.

*Властивість 2*. У групі з 4 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати будь-який з двох варіантів розбиття: $(1;\ 1)$ чи $(2;\ 0)$, тобто там можна провести або 1, або 2 хорди, в залежності від ходу цього гравця.

*Властивість 3*. У групі з 6 точок той, хто проводить хорду в середині цієї групи може вибрати один з таких варіантів розбиття: $(2;\ 2)$ чи $(3;\ 1)$, тобто там можна провести або 3, або 2 хорди.

*Властивість 4*. Якщо виникає симетрична ситуація (тобто групи точок можна розбити на пари з рівними кількостями точок в них), то перемагає той, хто зробив хід в таку симетричну ситуацію.

Доведення цих властивостей майже очевидне і проводиться простим перебором. Дамо пояснення до властивості 4. Якщо після ходу одного з гравців маємо ситуацію $(k;\ k)$, то він перемагає, використовуючи симетричні ходи по відношенню до ходів супротивника. Можливі інші симетричні ситуації, але вони є аналогічними за суттю.

Домовимось у подальшому не вказувати групи $(1)$ та $(0)$, бо вони не впливають на подальший хід гри.

***а)*** Андрій перемагає завдяки ходу $(6;\ 6)$, звідки з властивості 4 випливає його перемога завдяки подальшій симетричній стратегії.

***б)*** Олеся перемагає. Подивимось на можливі перші ходи Андрія.

Варіант 1. $(13)$: Олеся перемагає завдяки ходу $(8;\ 3)$. Подивимось на можливі відповіді Андрія.

Варіант 1.1. $(8)$: (фактично це був хід $(8;\ 1;\ 0)$ але дві останні групи ми не вказуємо). Тоді Олеся ходить $(3;\ 3)$ і перемагає завдяки симетричній стратегії.

Варіант 1.2. $(3;\ 6)$: Оскільки є група $(3)$, де можливий 1 хід, та група $(6)$, де Олеся може вибрати скільки ходів триватиме гра, то вона розбиває належним чином групу $(6)$. А саме, вона повинна зробити хід в позицію $(3;\ 6) \to (3;\ 3)$.

Варіант 1.3. $(3;\ 5)$: гра триває точно 3 ходи, останньою ходить Олеся і перемагає.

Варіант 1.4. $(3;\ 4;\ 2)$: завдяки групі $(4)$ Олеся перемагає. Вона повинна залишити групи $(2,3)$.

Варіант 1.5. $(3;\ 3;\ 3)$: очевидно, що Олеся перемагає.

Варіант 2. $(12) \to (5;\ 5)$ і перемагає Олеся.

Варіант 3. $(11;\ 2) \to (8;\ 2)$. У Андрія є такі варанти ходу:
$(6;\ 2)$, Олеся ходить в $(3;\ 2)$ і виграє.
$(5;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.
$(4;\ 2;\ 2)$, Олеся ходить в групі, де 4 точки в $(2;\ 2)$ і виграє.
$(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

Варіант 4. $(10;\ 3) \to (5;\ 3;\ 3)$ і гра триватиме ще 4 ходи, тобто перемагає Олеся.

Варіант 5. $(9;\ 4) \to (9)$. Далі можливі декілька підваріантів, які легко приводять до перемоги Олесі. $(9) \to (7) \to (5)$, або $(9) \to (6) \to (2;\ 2)$, або $(9) \to (4;\ 3) \to (2;\ 3)$.

Варіант 6. $(8;\ 5) \to (5;\ 5)$.

Варіант 7. $(7;\ 6) \to (7;\ 3)$ У Андрія є такі варанти ходу:
$(7)$, Олеся ходить в $(5)$ і виграє.
$(5;\ 3)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.
$(3;\ 2;\ 2)$, залишилось рівно три ходи. Тобто Олеся виграє.

## 9 клас

**9.5.** Відомо, що для чисел $a, b, c$ справджується умова: середнє арифметичне чисел $a, b$ дорівнює числу $c$, тобто $c = \frac{1}{2}(a+b)$, а середнє геометричне чисел $a, c$ дорівнює числу $b$, тобто $b = \sqrt{ac}$. Чи обов'язково числа $a, b, c$ рівні між собою?

*(Рубльов Богдан)*

***Відповідь:*** не обов'язково.

***Розв'язання***. Підставимо у рівність $b^2 = ac$ замість $c = \frac{a+b}{2}$ і матимемо:

$$b^2 = a \cdot \tfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2b^2 = ba + a^2 \Leftrightarrow (b-a)(2b+a) = 0.$$

Виберемо, наприклад, $b = 2$, тоді $a = -4$, звідси $c = -1$ і одержана трійка різних чисел умови задовольняє.

**9.6.** У трикутнику $ABC$ на сторонах $BC$ та $AB$ вибрано точки $A_1$ та $C_1$ відповідно такі, що $AA_1 = CC_1$. Відрізки $AA_1$ та $CC_1$ перетинаються в точці $F$. Виявилось, що $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$. Доведіть, що $AA_1 = AC$.

*(Гоголєв Андрій)*

***Розв'язання***. Розглянемо паралельний перенос на вектор $\overrightarrow{A_1A}$ (рис. 13). Тоді $AA_1CC_3$ – паралелограмам, $CC_1C_2C_3$ – ромб. Тоді $\angle C_1CC_3 = \angle C_1FA = \angle CFA_1 = 2\alpha$, звідси

$$\angle C_1AC_3 = 180° - \angle ABC = 180° - \tfrac{1}{2}\angle CFA_1 = 180° - \alpha.$$

Тепер якщо побудувати коло з центром у точці $C$, то центральний кут $\angle C_1CC_3 = 2\alpha$, тому вписаний кут, що спирається на дугу $C_1C_3$, дорівнює $\alpha$, тому точка $A$ лежить на цьому ж колі. Звідси $AC = CC_3 = AA_1$, що й треба було довести.

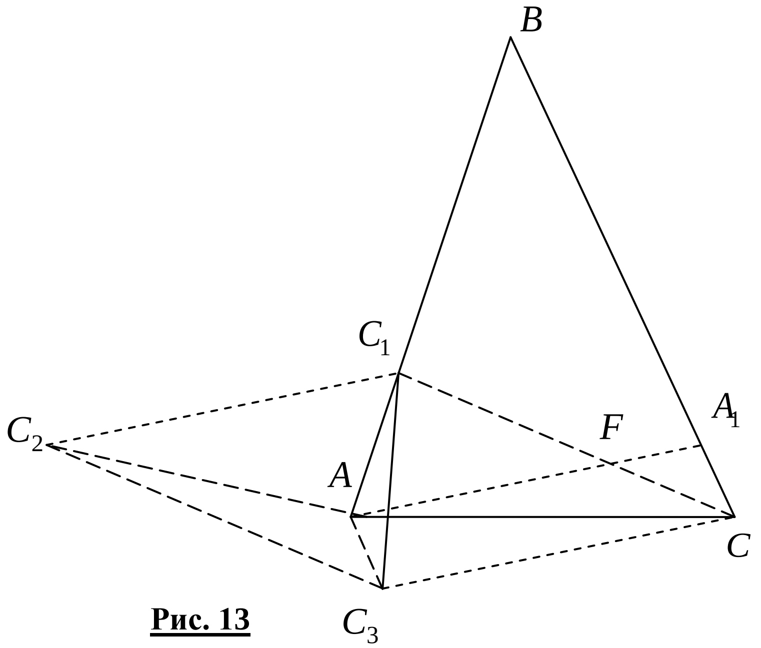



**Рис. 13**

***Альтернативне розв'язання*.** Проведемо пряму $l$, що є бісектрисою вертикальних кутів $A_1FC$ та $C_1FA$. Нехай ця пряма перетинає відрізки $AC_1$ та $CA_1$ у точках $P$ та $Q$ відповідно (рис. 14).

Оскільки за умовою $\angle CFA_1 = 2\angle ABC$, то $\angle QFA_1 = \angle PBA_1$. Це означає, що чотирикутник $PBA_1F$ є вписаним. Аналогічно є вписаним також чотирикутник $QBC_1F$. Для того, щоб виконувалась рівність $AA_1 = AC$ необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність кутів $\angle AA_1C = \angle ACA_1$. Оскільки чотирикутник $PBA_1F$ є вписаним, то $\angle AA_1C = \angle QPB$. Тобто нам достатньо довести, що $\angle ACB = \angle BPQ$. Ця рівність кутів рівносильна тому, що трикутники $ABC$ і $QBP$ є подібними, тобто що $\frac{AB}{BC} = \frac{QB}{BP}$. Знову скористаємось тим, що чотирикутник $PBA_1F$ є вписаним. За теоремою про добуток відрізків січних $AP \cdot AB = AF \cdot AA_1$. Аналогічно $CQ \cdot CB = CF \cdot CC_1$. Розділимо першу рівність на другу і отримаємо, що має місце рівність $\frac{AF}{CF} = \frac{AP}{CQ} \cdot \frac{AB}{BC}$ (ми скористались тим, що $AA_1 = CC_1$).

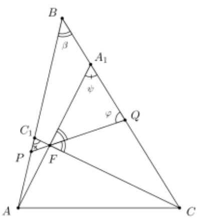



**Рис. 14**

Тепер нам достатньо довести, що $\frac{AF}{CF} = \frac{AP}{CQ} \cdot \frac{QB}{BP} \iff \frac{QB}{BP} = \frac{AF}{PA} \cdot \frac{CQ}{CF}$. Позначимо $\angle ABC = \angle QFC = \angle PFA = \beta$, $\angle FQB = \angle FC_1A = \varphi$, $\angle FPB = \angle FA_1C = \psi$. За теоремою синусів для трикутника $QBP$ маємо $\frac{QB}{BP} = \frac{\sin\psi}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника $FQC$ маємо $\frac{CQ}{CF} = \frac{\sin\beta}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$. За теоремою синусів для трикутника $FPA$ маємо $\frac{AF}{PA} = \frac{\sin(180^\circ - \psi)}{\sin\beta} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$. Звідси маємо, що $\frac{QB}{BP} = \frac{AF}{PA} \cdot \frac{CQ}{CF} \iff \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\varphi}$, а остання рівність, очевидно є вірною.

**9.7.** Знайдіть усі прості числа $p<q<r$ такі, що числа $A=(r-p)(r-q)(q-p)+1$ і $B=3p+5q$ дорівнюють одному й тому самому простому числу.

*(Ясінський В'ячеслав)*

***Відповідь:*** $p=2,\ q=5,\ r=7$.

***Розв'язання.*** Нехай $p,\ q,\ r$ – прості числа, для яких виконується умова задачі. Якщо $p>2$, то усі числа $p,\ q,\ r$ – непарні, а тому число $A=3p+5q$ – парне, а число $B=(r-p)(r-q)(q-p)+1$ – непарне, що суперечить умові задачі. Отже, $p=2$, тоді за умовою виконується рівність:

$$(r-2)(r-q)(q-2)+1=6+5q.$$

Оскільки $p<q<r$, то $r-2>q-2$ і $r-q\geq 2$. Тому, $6+5q>2(q-2)^2+1$. Якщо розв'язати останню нерівність, то будемо мати, що $q<7$. Прості числа, що задовольняють цій нерівності, це $q=3$та $q=5$.

Якщо $q=3$, то $B=3p+5q=21$ – не є простим числом.

Якщо $q=5$, то $B=3p+5q=31$ - просте число, тоді повинно $A=(r-2)(r-5)\cdot 3+1=31$, тобто $r^2-7r=0$, звідки $r=7$.

**9.8.** Є $2k+1$ людина, усі попарно різного зросту. Позначимо їх зріст у порядку зростання – він найнижчого до найвищого, таким чином: $a_1<a_2<\ldots<a_{2k+1}$. Після цього вишукуємо їх довільним чином у вигляді таблиці $M\times N$ ($M$ – рядків та $N$ стовпчиків). Тепер у кожному з $M$ рядків вибираємо середнього за зростом. А далі з цих середніх за зростом $M$ людей вибираємо середнього за зростом, якого назвемо ***середняк***.

***а)*** Який найменший зріст може мати середняк, якщо $2k+1=2015$?

***б)*** Який найменший зріст може мати середняк для довільного $k$?

*(Рубльов Богдан)*

***Відповідь***: ***а)*** $528$; ***б)*** найменший номер $(m+1)(n+1)$, де $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, при цьому множники є найближчими один до іншого серед усіх можливих.

***Розв'язання***. Зрозуміло що, якщо переставити два стовпчики місцями, то номер середнього не зміниться. Так само буде і з рядками.

Оскільки усього $2k+1=M\cdot N$ – непарне число, то $M$ та $N$ – непарні, покладемо $M=2m+1$, $N=2n+1$. Тоді позначимо середніх у кожному з $M$ рядків $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_M$. Шляхом перестановок рядків можемо добитися того, що $b_1<b_2<\ldots<b_M$. Тоді середняком є $b_{m+1}$. Підрахуємо, вище скількох людей він точно буде. У кожному з $m+1$ перших рядків відповідний $b_i$ є середнім, $i=\overline{1,\ m+1}$, а тому вищим за $n$ людей. Оскільки $b_{m+1}$ вищий за $b_i$, $i=\overline{1,\ m}$, то разом маємо, що він вищий за $(m+1)n$ та ще $m$, тобто разом: $mn+m+n$. Тому номер середнього не менший за: $mn+m+n+1=(m+1)(n+1)$.

Тепер треба розв'язати таку задачу – знайти найменше можливе значення добутку $(m+1)(n+1)$, за умови, що $2k+1=(2m+1)(2n+1)$. Позначимо $\sqrt{2k+1}=k_1$, розглянемо такі дві пари чисел $(m,\ n)$ та $(m_1,\ n_1)$, що задовольняють умови: $2k+1=(2m+1)(2n+1)$, $2k+1=(2m_1+1)(2n_1+1)$ та $1\leq 2m+1<2m_1+1\leq 2n_1+1<2n+1\leq 2k+1$. Покладемо

$$2m+1=\tfrac{k_1}{a},\ 2n+1=k_1 a,\ 2m_1+1=\tfrac{k_1}{b},\ 2n_1+1=k_1 b,\ a>b\geq 1.$$

Тоді $2m+2=\frac{k_1}{a}+1$, $2n+2=k_1 a+1$, $2m_1+2=\frac{k_1}{b}+1$, $2n_1+2=k_1 b+1$, порівняємо такі вирази:

$$(m+1)(n+1)-(m_1+1)(n_1+1)=\tfrac{1}{4}\left((2m+2)(2n+2)-(2m_1+2)(2n_1+2)\right)=$$
$$=\tfrac{1}{4}\left(\left(\tfrac{k_1}{a}+1\right)(k_1a+1)-\left(\tfrac{k_1}{b}+1\right)(k_1b+1)\right)=\tfrac{1}{4}\left(k_1^2+k_1\left(\tfrac{1}{a}+a\right)+1-k_1^2-k_1\left(\tfrac{1}{b}+b\right)-1\right)=$$
$$=\tfrac{k_1}{4}\left((a-b)-\left(\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}\right)\right)=\tfrac{k_1}{4}\left((a-b)-\tfrac{a-b}{ab}\right)=\tfrac{k_1}{4}(a-b)\tfrac{ab-1}{ba}>0.$$

Таким чином найменше значення набувається для випадку, коли ці множники найближчі один до іншого.

***б)*** Якщо $2k+1=(2i+1)^2$, то найближчі дільники – рівні, це $(2i+1)$ та $(2i+1)$, і найменший номер для середняка $i^2$. Якщо $(2k+1)$ не є повним квадратом, то дільників парна кількість, і можемо виписати усі дільники числа $2k+1$ у порядку зростання: $1=d_1<d_2<\ldots<d_{2l}=2k+1$. Тоді симетрично розташовані дільники як раз дають у добутку число $2k+1$. Таким чином шуканими є $d_l=2j+1$ та $d_{l+1}=2t+1$, і шуканим номером є $(j+1)(t+1)$.

***а)*** Якщо $2k+1=2015=5\cdot13\cdot31$, то дільники можна виписати таким чином:

$$1<5<13<31<65<155<403<2015.$$

Середні – це $31=15\cdot2+1$ та $65=32\cdot2+1$, тому шуканий номер середнього – це

$$(15+1)\cdot(32+1)=528.$$

## 10 клас

**10.5.** Знайдіть найбільше натуральне число, що ділиться націло на 7, та має у своєму записі лише непарні цифри, сума яких 2015.

*(Рубльов Богдан)*

***Відповідь:*** $11113\underbrace{11\ldots1}_{2008}$.

***Розв'язання*****.** Зрозуміло, що число є тим більшим, чим більше має цифр. Оскільки кожна цифра дорівнює мінімум $1$, то максимальна кількість цифр може бути $2015$. Таке число єдине: $\underbrace{11\ldots1}_{2015}$, оскільки $111111=15873\cdot7$, $11111 \not\vdots\, 7$ та $2015=335\cdot6+5$, то це число на $7$ не ділиться.

Шукане число не може мати $2014$ цифр, оскільки сума 2014 непарних чисел не може дорівнювати непарному числу.

Таким чином шукане найбільше число може мати максимум $2013$ цифри. Очевидно, що воно повинно мати $2012$ цифр $1$ та одну цифру $3$, ніякі інші варіанти неможливі. Знайдемо найбільше число такої структури, яке кратне $7$. Це означає, що треба знайти таке число з цифрою $3$ у найбільшому можливому розряді. Тобто шукане число має такий вигляд: $A=\underbrace{11\ldots1}_{2013}+2\cdot10^k$, де $k\le2012$, при цьому $A$ повинно ділитись на $7$ та $k$ – максимальне можливе.

Оскільки $A=\underbrace{11\ldots1}_{2010}000 \,\vdots\, 7$, бо $2010=335\cdot6$ та $111111 \,\vdots\, 7$, то повинно ділитись на $7$ ось таке число: $B=111+2\cdot10^k$. Оскільки $111\equiv6 \pmod 7$, то повинно бути виконано $2\cdot10^k\equiv1 \pmod 7$. Розглянемо періодичність остач таких чисел за модулем $7$ (не забудемо, що $10\equiv3 \pmod 7$):

$$2\cdot10^0\equiv2 \pmod 7,\ 2\cdot10^1\equiv6 \pmod 7,\ 2\cdot10^2\equiv4 \pmod 7,\ 2\cdot10^3\equiv5 \pmod 7,$$
$$2\cdot10^4\equiv1 \pmod 7,\ 2\cdot10^5\equiv3 \pmod 7,\ 2\cdot10^6\equiv2 \pmod 7,\ \ldots$$

і далі за циклом таким чином шукані значення для $k$ треба шукати у вигляді $k=6l+4$. Оскільки $2010=335\cdot 6$, то найбільше можливе значення для $k=334\cdot 6+4=2008$, відповідно до цього шукане найбільше число – це $11113\underbrace{11...1}_{2008}$.

**10.6.** ***а)*** Андрій та Олеся отримали по набору з карток, на яких написані усі цілі числа від 1 до 2015. Після цього Олеся залишає собі деяку кількість карток (але не усі) зі свого набору, а решту відкладає. Андрій робить так само. На координатній площині розглядаються ті $2015^2$ точок, які мають обидві цілі координати в межах від 1 до 2015 кожна. Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, а Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Олесиних карток (при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані у два кольори). Доведіть, що при будь-якому виборі карток, вони не зможуть досягти того, щоб кожна з $2015^2$ точок була пофарбована принаймні в один з двох кольорів?

***б)*** До Андрія та Олесі приєдналася Оксана, яка взяла собі усі картки, які відклали Олеся та Андрій. Після цього вони вже утрьох фарбують точки на новій чистій площині таким чином: Олеся фарбує у блакитний колір ті з цих точок, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Андрієвих карток, Андрій фарбує у жовтий колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з його карток, а друга – на одній з Оксаниних карток, а Оксана фарбує у зелений колір ті точки, у яких перша координата дорівнює числу на одній з її карток, а друга – на одній з Олесиних карток (знову при цьому деякі точки можуть бути пофарбовані в декілька кольорів). При якому виборі карток Олесею та Андрієм вони утрьох зафарбують кожну з $2015^2$ точок принаймні в один колір?

*(Рубльов Богдан)*

***<u>Відповідь</u>**: б)* на усіх картках, що не вибрали Олеся та Андрій усі числа різні.

***<u>Розв'язання</u>**. а)* Без обмеження загальності будемо вважати, що Олеся не вибрала картку з числом $a$. Тоді точка $(a;a)$ не зможе бути пофарбованим. Дійсно, Олеся його не фарбує, бо у цієї точки перша координата $a$, а Андрій не фарбує, бо у цієї точки друга координата $a$.

***б)*** Якщо є однакове число, наприклад 1, яке було не вибране обома, то точка (1, 1) не може бути зафарбованим ні Олесею, ні Андрієм (бо перша координата 1), ні Оксаною, бо друга координата 1.

Нехай тепер усі картки в наборах, що не обрані Олесею та Андрієм – попарно різні. Звідси зрозуміло, що кожне з чисел від 1 до 2015 було обрано принаймні одним з двох. Покажемо, що за таких умов усі точки будуть зафарбовані.
Розглянемо точку $(a;b)$ і можливі випадки.
$a$ – серед обраних Олесею, $b$ – Андрієм. Тоді цю точку фарбує Олеся.
Якщо $b$ – Андрієм не обране, то його обрала Олеся та воно дісталося Оксані. Якщо $a$ – серед обраних і Андрієм, то $(a;b)$ фарбує Андрій. Якщо ні, то $a$ дісталися Оксані і Олесі, бо його не обрав Андрій, тому $(a;b)$ фарбує Оксана.
$a$ – немає серед обраних Олесею, тому воно є у Андрія та Оксани. Якщо $b$ є у Олесі, то $(a;b)$ фарбує Оксана, якщо його у Олесі немає, то воно є у Оксани і точку $(a;b)$ фарбує Андрій.
Твердження доведене.

**10.7.** У гострокутному трикутнику $ABC$ висоти $AA_1$ та $BB_1$ перетинаються в точці $H$. Побудуємо два кола $w_1$ та $w_2$ з центрами в точках $H$ та $B$ і радіусами $HB_1$ та $BB_1$ відповідно. З точки $C$ до кіл $w_1$ та $w_2$ проведемо дотичні, які дотикаються до цих кіл у точках $N$ та $K$, відмінних від $B_1$, відповідно. Доведіть, що точки $A_1$, $N$ та $K$ лежать на одній прямій.

*(Нагель Ігор)*

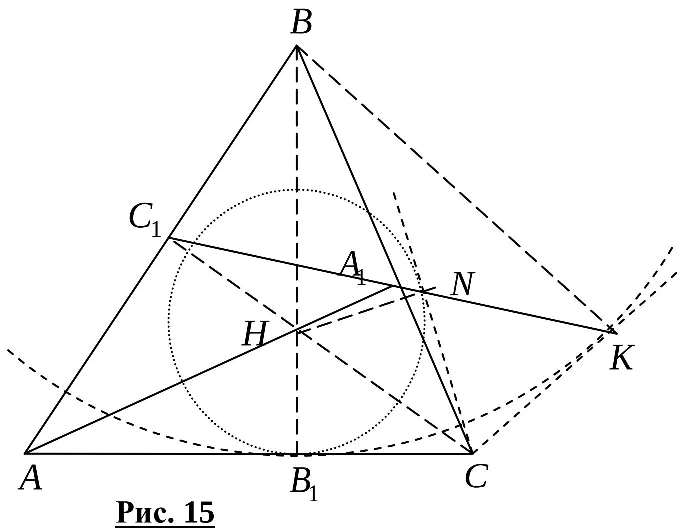



**Рис. 15**

***Розв'язання***. Проведемо третю висоту $CC_1$ (рис. 15), навколо чотирикутника $AB_1HC_1$ можна описати коло, тому $\angle A = 180° - \angle C_1HB_1 = \angle B_1HC$. Оскільки $\Delta B_1HC = \Delta NHC$, тому $\angle A = \angle CHN$. Навколо чотирикутників $HA_1NC$ та $AC_1A_1C$ можна описати кола, оскільки $\angle HA_1C = 90°$, $\angle HNC = 90°$, $\angle AC_1C = 90°$. Звідси, $180^0 - \angle C_1A_1C = \angle BAC = \angle CHN = \angle CA_1N \Rightarrow$ точки $C_1$, $A_1$ та $N$ лежать на одній прямій. Оскільки $BA_1HC_1$ – вписаний, то $\angle HC_1A_1 = \angle HBA_1$, але ж $\angle A_1BK = \angle HBA_1$. Оскільки точки $C, C_1, B, K$ лежать на одному колі, то $\angle CBK = \angle KC_1C$, звідки випливає, що точки $C_1$, $A_1$ та $K$ лежать на одній прямій. Оскільки точки $C_1$ та $A_1$ – різні, то усі чотири точки $C_1$, $A_1$, $N$ та $K$ лежать на одній прямій, що й треба було довести.

**10.8.** Знайдіть усі такі функції $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, що для усіх дійсних $x, y$, справджується рівність:

$$4f(x + f(y)) = f(x) + f(y) + f(xy) + 1.$$

*(Анікушин Андрій)*

***Відповідь:*** $f(x) \equiv 1$.

***Розв'язання***. Припустимо, що існує $a \neq 0$, для якого $f(a) = f(0) = b$. Тоді у початкове рівняння, яке позначимо **(0)**, зробимо такі підстановки.

Спочатку $y = 0$:

$$4f(x+b) = f(x) + b + b + 1. \qquad \textbf{(1)}$$

Тепер у **(0)** підставимо $y = a$:

$$4f(x+b) = f(x) + b + f(xa) + 1. \qquad \textbf{(2)}$$

Якщо їх порівняти **(1)** та **(2)**, матимемо, що $f(ax) = b$, звідки шукана функція константа. Якщо $f(x) = b$ підставити у початкове рівняння, матимемо, що $4b = 3b + 1$, звідки із сталих функцій умову задовольняє функція $f(x) \equiv 1$. Інакше, з умови $f(a) = f(0)$ випливає, що $a = 0$.

З симетричності правої частини маємо, що ліва повинна також бути симетричною відносно змінних $x, y$, тому справджується рівність:

$$f(x + f(y)) = f(y + f(x)).$$

Підставимо в це рівняння $x = -f(y)$, тоді матимемо, що

$$f(0) = f(-f(y) + f(y)) = f(y + f(-f(y))) \Rightarrow y + f(-f(y)) = 0$$

$$f(-f(y)) = -y. \qquad \textbf{(3)}$$

Тепер підставимо у початкове рівняння $x=1$ та $y=-f(t)$:

$$4f\big(1+f(-f(t))\big)=f(1)+f(-f(t))+f(-f(t))+1$$

Якщо скористатися умовою **(3)** матимемо, що

$$4f(1-t)=f(1)-t-t+1. \qquad \textbf{(4)}$$

Покладемо в умові **(4)** $t=1-z$, звідси

$$4f(z)=f(1)-2(1-z)+1=2z+c_1 \text{ або } f(z)=\tfrac{1}{2}z+c.$$

Підставимо це співвідношення у задане рівняння:

$$4f(x+\tfrac{1}{2}y+c)=4(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}c+c)=2x+y+6c=\tfrac{1}{2}x+c+\tfrac{1}{2}y+c+\tfrac{1}{2}xy+c+1,$$

яке очевидно не задовольняє умову при усіх можливих $x,\ y$.

## 11 клас

**11.5.** ***а)*** Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2\ldots a_{2015}-1$ є добутком двох послідовних непарних чисел?

***б)*** Чи існують 2015 натуральних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2015}$ такі, що будь-які два з них є взаємно простими, а число $a_1a_2\ldots a_{2015}-1$ є добутком двох послідовних парних чисел?

*(Ясінський В'ячеслав)*

***Відповідь****. а), б) існують.*

***Розв'язання****. **а)*** Так існують. Нехай $a_1=p_1^2,\ a_2=p_2^2,\ \ldots,\ a_{2015}=p_{2015}^2$, де $p_1=2,\ p_2,\ \ldots,\ p_{2015}$ – перші 2015 простих чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і $a_1a_2\ldots a_{2015}-1=\left(p_1p_2\ldots p_{2015}-1\right)\left(p_1p_2\ldots p_{2015}+1\right)$ – добуток двох непарних послідовних чисел.

***б)*** Так, існують. Нехай тепер $a_1=p_1^2,\ a_2=p_2^2,\ \ldots,\ a_{2015}=p_{2015}^2$, де $p_1=3,\ p_2=5,\ \ldots,\ p_{2015}$ – перші 2015 простих непарних чисел. Зрозуміло, що усі вони попарно взаємно прості і $a_1a_2\ldots a_{2015}-1=\left(p_1p_2\ldots p_{2015}-1\right)\left(p_1p_2\ldots p_{2015}+1\right)$ – добуток двох парних послідовних чисел.

**11.6.** Задача 10-7.

**11.7.** Послідовність натуральних чисел $(a_n)$ задається правилом: $a_1=a$, $a_2=b$, де $a$ та $b$-- натуральні, а для всіх $n\ge 2$ $a_{n+1}$ дорівнює кількості індексів $i,\ 1\le i\le n$, таких, що $a_i=a_n$. Наприклад, для $a=2,\ b=1$ початок послідовності виглядатиме так (2; 1; 1; 2; 2; 3…). Знайдіть усі пари натуральних чисел $(a,\ b)$, для яких, починаючи з деякого місця, послідовність $(a_n+a_{n+1})$ буде неспадною.

*(Чорний Максим)*

***Відповідь:*** $a=b=1$.

***Розв'язання.*** При $a=b=1$ послідовність має вигляд (1; 1; 2; 1; 3; 1; 4; 1; 5; 1; …), послідовність $(a_n+a_{n+1})$ матиме вигляд (2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; …), тому потрібне твердження виконується.

Нехай числа $a_1=a$ та $a_2=b$ не рівні одиниці одночасно. Від перестановки місцями $a_1$ та $a_2$ подальші члени послідовності не зміняться, тому вважаємо $a_1\ne 1.$ Зрозуміло, що послідовність $(a_n)$ необмежена. Справді, якщо припустити, що її максимальний член дорівнює $s$, то серед чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_{s^2+1}\}$ за принципом Діріхле буде $s+1$ однакове, а тому за означенням послідовності число, що йде після останнього з них, буде не меншим за $s+1$, що призводить до суперечності.

Тепер припустимо, що для $n \geq N$ послідовність $(a_n + a_{n+1})$ є неспадною. Розглянемо $k \geq N+1$ таке, що $a_k = t \geq \max\{a, b\}+1$ і це перша поява числа $t$ в нашій послідовності. Очевидно, що всі числа до цієї позиції строго менші за $t$. Тоді $a_{k+1} = 1$ за означенням і $a_{k-1} = 1$ за припущенням неспадності. Це означає, що існує рівно $t$ індексів $\{1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_t = k-1\}$, для яких $a_{i_1} = a_{i_2} = \ldots = a_{i_t} = 1$. Тоді серед чисел $\{a_{i_1-1}; a_{i_2-1}; \ldots; a_{i_t-1}\}$ за принципом Діріхле буде принаймні одна пара рівних, оскільки всі вони не перевищують $t-1$. Але тоді в послідовності є дві пари чисел вигляду $\{\ldots, k, 1, \ldots\}$, що йдуть поспіль. Це очевидно суперечить умові, бо після другої появи числа $k$ може йти мінімум двійка. Суперечність.

**11.8.** Для довільних різних чисел $a, b$ розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + z = 2y + (a+b), \\ 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a+b)y + ab, \\ x^3 + 3x^2 z = y^2(a+b) + 2yab. \end{cases}$$

*(Рубльов Богдан)*

***<u>Відповідь</u>.*** $x = y = a$, $z = b$ та $x = y = b$, $z = a$.

***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай $(x, y, z)$ – деякий розв'язок цієї системи. Побудуємо два многочлени

$$P(t) = (t-x)^3(t-z) = t^4 + p_1 t^3 + q_1 t^2 + r_1 t + s_1 \text{ та}$$

$$Q(t) = (t-y)^2(t-a)(t-b) = t^4 + p_2 t^3 + q_2 t^2 + r_2 t + s_2,$$

і розглянемо такий многочлен $f(t)$:

$$f(t) = P(t) - Q(t) = (p_1 - p_2)t^3 + (q_1 - q_2)t^2 + (r_1 - r_2)t + (s_1 - s_2).$$

Коренями полінома $P(t)$ є числа $x, x, x, z$, а $Q(t)$ – числа $y, y, a, b$. За теоремою Вієта для полінома четвертої степені ми маємо такі рівності:

$$p_1 = -(3x + z) = -(2y + (a+b)) = p_2$$

$$q_1 = 3x^2 + 3xz = y^2 + 2(a+b)y + ab = q_2$$

$$r_1 = -(x^3 + 3x^2 z) = -(y^2(a+b) + 2yab) = r_2$$

Таким чином $f(t) = (s_1 - s_2) = C = \text{const}$. Висновок: графіки цих двох функцій одержані зсувом вздовж вертикальної осі на деяку сталу $C$. Зрозуміло, що

$$P'(t) = (t-x)^2(4t - 3z - x) \equiv Q'(t) = (t-y)\left(4t^2 - (3a + 3b + 2y)t + 2ab + y(a+b)\right).$$

Підставимо у квадратний тричлен $R(t) = 4t^2 - (3a + 3b + 2y)t + 2ab + y(a+b)$ значення $t_0 = \frac{1}{2}(a+b)$ і одержимо, що

$$R(t_0) = (a+b)^2 - 3(a+b)\tfrac{a+b}{2} - 2y\tfrac{a+b}{2} + 2ab + y(a+b) = -\tfrac{(a+b)^2}{2} + 2ab = -\tfrac{(a-b)^2}{2} < 0.$$

Тобто цей квадратний тричлен має два різних корені, тому його дискримінант додатний. Але в нас має місце тотожності $P'(t) \equiv Q'(t)$ (бо ці многочлени відрізняються на деяку сталу) та $P'(t)$ має $t = x$ коренем кратності 2. Тоді у многочлена $Q'(t)$ також $t = x$ – корінь кратності 2. Оскільки $R(t)$ має два різних корені, то рівно один з них співпадає з $x$, й $y = x$. Крім того $R(y) = 0$, тобто

$$R(y) = 4y^2 - (3a + 3b + 2y)y + 2ab + y(a+b) = 2\left(y^2 - (a+b)y + ab\right) = 0,$$

що можливо лише при умові $y = a$ або $y = b$. Таким чином остаточно маємо, що

$$f(t) = P(t) - Q(t) = (t-x)^3(t-c) = C,$$

де $c = a$ або $c = b$. Але це можливе лише при умові $z = c$. Звідси випливає, що ці многочлени співпадають і ми маємо два розв'язки:

$$x = y = a,\ z = b, \text{ або } x = y = b,\ z = a.$$

Другу частину можна також довести за допомогою теореми Ролля. Розглянемо многочлен $Q(t) = (t-y)^2(t-a)(t-b)$. Припустимо, що усі значення $y, a, b$ попарно різні, тоді похідна $Q'(t)$ має три різні корені, оскільки $t = y$ є кратним коренем многочлена, а також по одному кореню знаходиться на проміжках між числами $y, a, b$ в залежності від їх величини. Але $P'(t)$ тотожньо співпадає з $Q'(t)$, тому він також повинен мати три різні корені, а він має корінь $t = x$ кратності 2. Одержана суперечність показує, що не усі числа $y, a, b$ є різними. Оскільки за умовою числа $a, b$ – різні то можлива ситуація, або $y = a$, або $y = b$. Оскільки вони аналогічні, то розглянемо спочатку, що $y = a$. Тоді $Q(t) = (t-y)^3(t-b)$, і кубічний многочлен $Q'(t)$ має $t = y$ – корінь кратності 2, а тотожньо рівний йому кубічний многочлен $P'(t)$ має корінь $t = x$ кратності 2, звідси $x = y$, і ми маємо таку рівність:

$$C = (t-x)^3(t-z) - (t-x)^3(t-b) = (t-x)^3(z-b),$$

яка можлива лише за умови $z = b$. Таким чином у цьому випадку ми маємо, що система має такий розв'язок: $x = y = a,\ z = b$. У іншому випадку повністю аналогічно ми маємо другий розв'язок системи: $x = y = b,\ z = a$.