Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LV Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та розв'язання задач першого дня

ВСТАВАЙ, УКРАЇНО ! Ти мусиш здолати
Усіх вороженьків, що нищать нам хату
І душу калічать, що волею диха...
У Господа молим: врятуй нас від лиха !
БОРИСЬ, УКРАЇНО! За щастя і долю,
За небо безхмарне і усміх дитячий,
Щоб постріл гармат не відлунював болем
У серденьку мами, що кровію плаче...
ЖИВИ, УКРАЇНО ! Я - СИН ТВІЙ ДО ЗГИНУ !!

Наталія Крісман

<u>8 клас</u>

8.1. Знайдіть усі цілі числа n, які задовольняють рівність:

$$(n-2013)(n-2014)(n-2016)(n-2017)=4.$$

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> $n=2015$.

<u>Розв'язання</u>. Якщо ціле число n задовольняє умову, то число 4 подається як добуток чотирьох попарно різних цілих чисел. Оскільки цілими дільниками цього числа є лише числа ±1, ±2 та ±4, то шуканими множниками можуть бути лише числа ±1 та ±2. Дійсно, якщо один з дільників за модулем дорівнює 4, то інші три повинні за модулем не перевищувати 1 і не бути нулем, що неможливо, оскільки таких чисел усього два.

Оскільки $n-2013$ - найбільший з множників, то він повинен дорівнювати 2, при цьому $n=2015$ - задовольняє умову задачі. З наведених міркувань зрозуміло, що це єдине число, що задовольняє умови задачі.

8.2. У Насті є 5 жовтих монет, про які їй відомо, що вони справжні. В неї є також 5 синіх монет, про які їй відомо, що серед них 3 справжні та дві фальшиві. Усі 8 справжніх монет важать однаково, одна з фальшивих монет важча за справжню на 1 грам, а інша – легша за справжню також на 1 грам. Чи зможе Настя за допомогою шалькових терезів без гир за 3 зважування визначити обидві фальшиві монети та вказати, яка з них більш важка, а яка більш легка?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь</u>. Зможе.

<u>Розв'язання.</u> Позначимо для зручності блакитні монети Б1, …, Б5. Спочатку порівняємо 3 жовтих та 3 блакитних монети Б1, Б2, Б3:

$$\textbf{1)}\ Ж1+Ж2+Ж3\ ?\ Б1+Б2+Б3.$$

Розглянемо можливі випадки.

$$\textbf{1a)}\ Ж1+Ж2+Ж3=Б1+Б2+Б3.$$

Тоді можливі варіанти. Фальшиві серед Б1, Б2, Б3, або серед Б4 та Б5. У тій групі, де фальшиві монети, усі монети різної ваги.

Другим зважуванням порівняємо такі монети:

$$\textit{2)}\ Б1\ ?\ Б2.$$

Можливі такі варіанти.

$$\textit{2а)}\ Б1 = Б2.$$

Це означає, що ці монети справжні, а тому фальшиві Б4 та Б5. Треба просто порівняти їх і з'ясувати яка більш важка, яка більш легка.

$$\textit{2б)}\ Б1 > Б2.$$

Тоді можливі три варіанти розподілу справжніх та фальшивих монет. Б1 – важка, Б2 легка, або Б1 – важка, Б2 справжня, або Б1 – справжня, Б2 легка. Порівняємо сумарну вагу монет Б1, Б2 та Ж1, Ж2 (двох справжніх). У першому випадку вони рівні, у другому Б1, Б2 важчі, а у третьому – легші за Ж1, Ж2, а тому маємо відповідь на усі питання після результатів третього зважування:

$$\textit{3)}\ Ж1+Ж2\ ?\ Б1+Б2.$$

Очевидно, що аналогічно завершується розв'язання задачі у випадку

$$\textit{2в)}\ Б1 < Б2.$$

Другий випадок.

$$\textit{1б)}\ Ж1+Ж2+Ж3 > Б1+Б2+Б3.$$

Тоді серед Б1, Б2, Б3 є більш легка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш важка. Далі все просто з'ясовується за допомогою другого та третього зважувань:

$$\textit{2)}\ Б1\ ?\ Б2 \text{ та } \textit{3)}\ Б4\ ?\ Б5.$$

Наприклад, якщо ***2а)*** $Б1 = Б2$ та ***3а)*** $Б4 > Б5$, то Б3 фальшива більш легка, а Б4 – фальшива більш важка. Аналогічно розглядаються усі інші результати зважувань.

Третій випадок.

$$\textit{1в)}\ Ж1+Ж2+Ж3 < Б1+Б2+Б3.$$

Цей випадок аналогічний до випадку ***1б)***, але тепер серед Б1, Б2, Б3 є більш важка фальшива, а серед Б4, Б5 – більш легка.

8.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\sqrt{2014}-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2015}-\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{2016}-\sqrt{x+2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2015-x}-\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2016-x}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2017-x}-\sqrt{3}}.$$

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь</u>: $x=1$.

<u>Розв'язання</u>. Помножимо чисельник та знаменник кожного з шести доданків на вираз, спряжений до відповідного знаменника:

$$\frac{\sqrt{2014}+\sqrt{x}}{2014-x}+\frac{\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}}{2015-(x+1)}+\frac{\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}}{2016-(x+2)}=\frac{\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}}{(2015-x)-1}+\frac{\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}}{(2016-x)-2}+\frac{\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}}{(2017-x)-3}.$$

Неважко побачити, що усі дроби мають спільний знаменник, тому помножимо на нього і одержимо таке рівняння:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}=$$
$$=\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3},$$

при цьому $x \neq 2014$. Побачимо, що мають місце такі твердження:

1) $x=1$ – є коренем рівняння, бо при такому значенні x ліва і права частини нерівності складаються з однакових доданків:

$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}.$$

2) Позначимо через $S=\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}$. Тоді при $x>1$ маємо, що

$$\sqrt{2014}+\sqrt{x}+\sqrt{2015}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2016}+\sqrt{x+2}>$$
$$\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S,$$

тобто ліва частина більша за S, аналогічно для правої частини маємо, що

$$\sqrt{2015-x}+\sqrt{1}+\sqrt{2016-x}+\sqrt{2}+\sqrt{2017-x}+\sqrt{3}<$$
$$<\sqrt{2014}+\sqrt{1}+\sqrt{2015}+\sqrt{2}+\sqrt{2016}+\sqrt{3}=S.$$

Таким чином на цьому проміжку розв'язків немає. Аналогічно при $x<1$ ліва частина менша, а права частина більша ніж S

8.4. Дана трапеція $ABCD$ з основами BC та AD. На діагоналях AC та BD відмічені точки P та Q відповідно так, що AC - бісектриса $\angle BPD$, а BD - бісектриса $\angle AQC$. Доведіть, що $\angle BPD=\angle AQC$.

(Сердюк Назар)

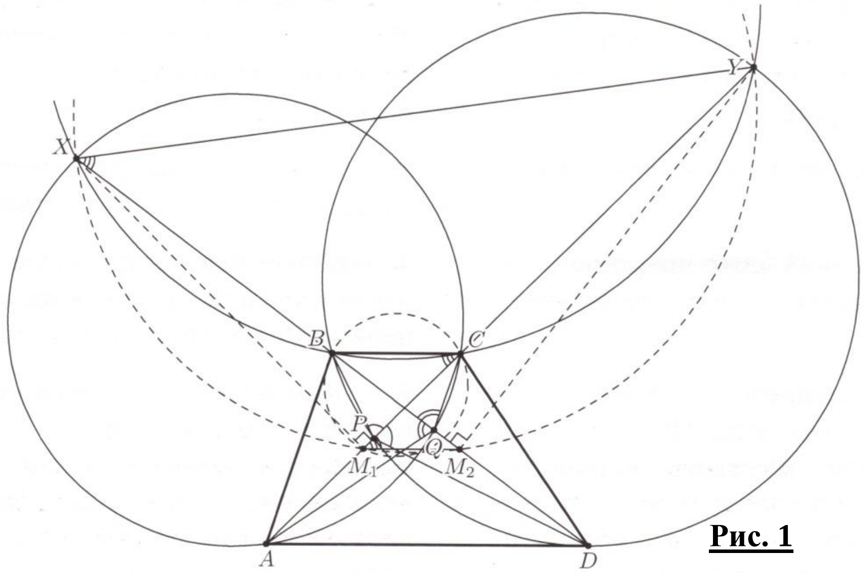

Рис. 1

***Розв'язання*.** Відмітимо середини діагоналей M_1 та M_2, як це показане на рис. 1. Як відомо, $M_1M_2 \parallel BC$. Побудуємо описані кола трикутників ΔAQC та ΔBPD. Нехай вони вдруге перетинають прямі BD та AC у точках X та Y відповідно. Оскільки BD містить бісектрису $\angle AQC$, то точка X є серединою більшої дуги AC описаного кола трикутника ΔAQC. Тоді X належить серединному перпендикуляру відрізка AC. Аналогічно, Y належить серединному перпендикуляру відрізка BD. Отже, чотирикутник XM_1M_2Y є вписаним, бо $\angle XM_1Y=\angle XM_2Y=90°$. Тоді $\angle M_1XM_2=\angle M_1YM_2$. Також $\angle BXY=\angle CM_1M_2=\angle M_1CB$, звідки чотирикутник $XBCY$ є вписаним. Звідси, $\angle BXC=\angle BYC$. Тоді

$$\angle AQC=180°-2\angle M_1XC=180°-2(\angle M_1XM_2+\angle M_2XC)=$$
$$=180°-2(\angle M_1YM_2+\angle M_1YB)=180°-2\angle M_2YB=\angle BPD.$$

***Альтернативне розв'язання*.** Відмітимо на діагоналі BD точку Q' (рис. 2), таку, що $\angle BQ'C=\angle BPC$. З рівності цих кутів випливає, що чотирикутник $BCQ'P$ є вписаним. Тоді $\angle Q'PC=\angle Q'BC=\angle Q'DA$, звідки випливає, що вписаним є також чотирикутник $APQ'D$. Тоді

$$\angle CPD=\angle CPQ'+\angle Q'PD=$$
$$=\angle Q'DA+\angle Q'AD=\angle BQ'A.$$

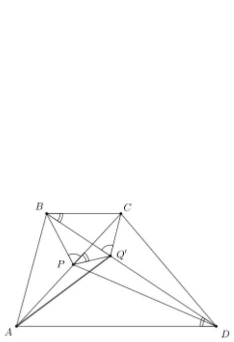

Рис. 2

Тобто ми отримали, що $\angle BPD = \angle CQ'A$. Крім того BD є бісектрисою кута $\angle CQ'A$. Покажемо, що $Q' = Q$. Припустимо, що ці точки різні. Оскільки $\angle CQB = \angle AQB$ та $\angle CQ'B = \angle AQ'B$, то трикутники $CQ'Q$ та $AQ'Q$ є рівними. Це означає, що пряма BD є серединним перпендикуляром до відрізка AC. Нескладно побачити, що з цього випливає, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, але тоді він не є трапецією, що суперечить умові. Таким чином, $Q' = Q$, звідки і випливає твердження задачі.

9 клас

9.1. Вартість одного кілограма шоколадних цукерок – x гривень, а кілограма картоплі – y гривень, причому числа x та y – натуральні та не більш ніж двоцифрові. Мати сказала Андрійкові купити 200 грамів цукерок та 1 кг картоплі, що мало коштувати рівно N гривень. Андрійко все переплутав і купив 200 грамів картоплі та 1 кг цукерок. Йому довелося сплатити рівно $M > N$ гривень. Виявилось, що двоцифрові числа N та M записуються одними й тими ж цифрами, але у різному порядку. Скільки коштує кілограм картоплі та кілограм цукерок?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: цукерки коштують 50 гривень, а картопля – 5 гривень.

***Розв'язання*.** Нехай цукерки та картопля коштують відповідно x та y гривень, при цьому $N = \overline{ab} = 10a + b$, $M = \overline{ba} = 10b + a$. З умови задачі $M > N$ тому $b > a > 0$. Тоді маємо такі рівняння:

$$\tfrac{1}{5}x + y = 10a + b \text{ та } \tfrac{1}{5}y + x = 10b + a, \text{ або } x + 5y = 50a + 5b \text{ та } y + 5x = 50b + 5a.$$

Тут $b > a > 0$ – цифри, а $x > y$ не більше ніж двоцифрові числа. Тоді

$$4(x - y) = 45(b - a). \qquad \textbf{(1)}$$

$$6(x + y) = 55(b + a). \qquad \textbf{(2)}$$

Таким чином $b - a \,\vdots\, 4$ та $b + a \,\vdots\, 6$. Розглянемо ті пари цифр, що задовольняють умови (1) та (2). Таких пар усього дві: $b = 5,\ a = 1$ та $b = 8,\ a = 4$. Розглянемо ці випадки.

Випадок 1. $b = 5,\ a = 1$, тоді $\begin{cases} x - y = 45, \\ x + y = 55. \end{cases}$ Звідси $x = 50,\ y = 5$.

Випадок 2. $b = 8,\ a = 4$, тоді $\begin{cases} x - y = 45, \\ x + y = 110. \end{cases}$ Звідси $x,\ y$ – не цілі.

9.2. У тенісному турнірі в одне коло взяли участь 8 дівчат (тобто кожна тенісистка зіграла з кожною іншою рівно 1 раз, нічиїх у тенісі не буває). Оксана посіла друге місце за набраними очками, і таку кількість очок не набрала більше жодна інша учасниця. Яку максимальну кількість ігор могла програти Олеся, яка перемогла в цьому турнірі?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 1.

***Розв'язання*.** Припустимо, що Олеся програла 2 гри. Тоді вона набрала 5 очок. Оксана не могла набрати 4 очки, оскільки тоді усього разом усіма командами було здобуто максимум $5 + 4 + 3 \cdot 6 = 27$ перемог. А усього зустрічей було зіграно рівно $\frac{1}{2}(8 \cdot 7) = 28$ -

М	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**оч**
1	Х	0	1	1	1	1	1	1	6
2	1	Х	1	0	1	0	1	0	4
3	0	0	Х	1	0	1	0	1	3
4	0	1	0	Х	1	0	1	0	3
5	0	0	1	0	Х	1	0	1	3
6	0	1	0	1	0	Х	1	0	3
7	0	0	1	0	1	0	Х	1	3
8	0	1	0	1	0	1	0	Х	3

Рис. 3

суперечність. Так само Оксана не могла набрати 3 чи менше очок, або Олеся програти 3 чи більше ігор. Таким чином усього Олеся могла програти щонайбільше 1 гру. Цей варіант можливий, про що свідчить
наведений у таблиці (рис. 3) приклад.

9.3. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c+2=abc$, доведіть нерівність: $\dfrac{a}{b+1}+\dfrac{b}{c+1}+\dfrac{c}{a+1}\geq 2$.

(Митрофанов Вадим)

***Розв'язання*.** Застосуємо нерівність Коші-Шварца для трійок чисел $\sqrt{\frac{a}{b+1}}, \sqrt{\frac{b}{c+1}}, \sqrt{\frac{c}{a+1}}$ та $\sqrt{a(b+1)}, \sqrt{b(c+1)}, \sqrt{c(a+1)}$ і одержимо, що

$$\sqrt{\tfrac{a}{b+1}}\cdot\sqrt{a(b+1)}+\sqrt{\tfrac{b}{c+1}}\cdot\sqrt{b(c+1)}+\sqrt{\tfrac{c}{a+1}}\cdot\sqrt{c(a+1)}\leq$$

$$\leq\sqrt{\left(\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1}\right)\big(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\big)}\ \Leftrightarrow$$

$$\left(\tfrac{a}{b+1}+\tfrac{b}{c+1}+\tfrac{c}{a+1}\right)\big(a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)\big)\geq(a+b+c)^2\ \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)}.$$

Тепер нам достатньо довести, що

$$\frac{(a+b+c)^2}{a(b+1)+b(c+1)+c(a+1)}\geq 2.$$

Остання нерівність рівносильна такій:

$$a^2+b^2+c^2\geq 2a+2b+2c. \qquad \textbf{(1)}$$

Знову застосуємо нерівність Коші-Шварца тепер для трійок чисел a, b, c та $2, 2, 2$:

$$(a^2+b^2+c^2)(4+4+4)\geq(2a+2b+2c)^2 \text{ або}$$

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2. \qquad \textbf{(2)}$$

Покажемо, що $a+b+c\geq 6$. З умови задачі маємо, що $a+b+c+2=abc$, тому

$$abc=(a+b)+(c+2)\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{2c}\geq 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{2c}}\ \Leftrightarrow\ (abc)^2\geq 16\sqrt{2abc}\ \Leftrightarrow$$

$$(abc)^4\geq 512abc\ \Leftrightarrow\ (abc)^3\geq 512\ \Leftrightarrow\ abc\geq 8.$$

Звідси маємо, що $a+b+c\geq abc-2\geq 6$, тоді з нерівності **(2)** маємо, що

$$a^2+b^2+c^2\geq\tfrac{1}{3}(a+b+c)(a+b+c)\geq\tfrac{1}{3}\cdot 6\cdot(a+b+c)=2(a+b+c),$$

звідки випливає потрібна нерівність **(1)**.

***Альтернативне розв'язання*.** Помітимо, що набори додатних чисел (a, b, c) та $\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{b+1}, \frac{1}{c+1}\right)$ протилежно впорядковані. Тому, за транс-нерівністю

$$\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}\geq\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{a(b+1)(c+1)+b(c+1)(a+1)+c(b+1)(a+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=$$

$$=\frac{abc+ab+ac+a+abc+bc+ba+b+abc+cb+ca+c}{abc+ab+bc+ca+a+b+c+1}=$$

$$=\frac{3abc+2(ab+bc+ca)+abc-2}{abc+ab+bc+ca+abc-1}=2,$$

що й потрібно було довести.

9.4. На стороні BC гострокутного трикутника ABC вибрано довільну точку D. Нехай O – центр описаного кола ΔABC, а Z – точка цього кола, що діаметрально протилежна точці A. Нехай X, Y такі точки на відрізках BO, CO відповідно, для яких виконується умова:

$$\angle BXD + \angle ABC = 180° = \angle CYD + \angle ACB.$$

Доведіть, що градусна міра $\angle XZY$ не залежить від вибору точки D.

(Хілько Данило)

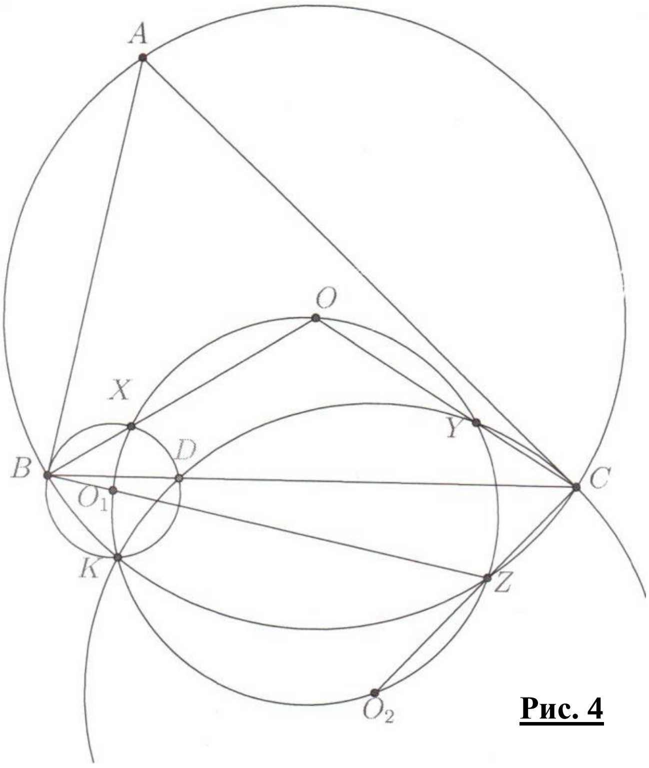

Рис. 4

Розв'язання. Наведемо розв'язок для розташування точок, зображенго на рисунку. Для інших випадків розташування розв'язок буде подібним. Доведемо, що для будь-якого вибору точки D чотирикутник $XOYZ$ є вписаним. Тоді $\angle XZY = 180° - 2\angle A$, тобто не залежить від вибору точки D на стороні BC.

З умов задачі очевидно випливає, що описані кола ΔBXD та ΔDYC дотикаються до прямих AB та AC відповідно. Позначимо ці кола як w_1 та w_2, а їх центри через O_1 та O_2 відповідно. Нехай K -- друга точка перетину цих кіл, що відмінна від точки D (рис. 4). Тоді

$$\angle BKC = \angle BKD + \angle DKC = \\ \angle B + \angle C = 180° - \angle A,$$

тобто точка K належить описаному колу ΔABC. Також маємо

$$\angle XKY = \angle XKD + \angle DKY = \angle XBD + \angle DCY = 180^0 - \angle XOY,$$

тобто чотирикутник $XOYK$ – вписаний. Зазначимо, що оскільки AZ – діаметр великого кола, то $AB \perp BZ$, а тому O_1 належить прямій BZ. Аналогічно O_2 належить прямій CZ. Доведемо, що O_1, O_2 належать описаному колу чотирикутника $OXKY$. Справді,

$$\angle XO_1K = 2\angle XBK = 2(90° - \tfrac{1}{2}\angle BOK) = 180° - \angle XOK,$$

аналогічно і для точки O_2. Тепер доведемо, що і точка Z належить описаному колу чотирикутника $OXKY$, що й завершить розв'язання задачі. Для цього достатньо довести, що $\angle O_1ZO_2 + \angle O_1KO_2 = 180°$. Справді,

$$\angle O_1KO_2 = \angle O_1KD + \angle DKO_2 = 90° - \angle DBK + 90° - \angle DCK = 180° - \angle A = \\ = \angle BZC = 180° - \angle O_1ZO_2.$$

10 клас

10.1. Розв'яжіть рівняння:

$$ctg[x] \cdot ctg\{x\} = 1.$$

Тут через $[a]$ *позначена ціла частина числа* a*, тобто найбільше ціле число, що не перевищує* a*, а через* $\{a\}$ *- дробова частина числа* a*, тобто* $\{a\} = a - [a]$.

(Апостолова Галина)

Відповідь. $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k$, $k \in Z$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді:

$$\cos[x] \cdot \cos\{x\} = \sin[x] \cdot \sin\{x\},$$

при умові, що $\sin[x]\cdot\sin\{x\}\neq 0$. Перенесемо усе в один бік і одержимо, що

$$\cos[x]\cdot\cos\{x\}-\sin[x]\cdot\sin\{x\}=\cos([x]+\{x\})=\cos x=0.$$

Звідси знаходимо, що $x=\frac{1}{2}\pi+\pi k$, $k\in Z$.

Залишається переконатись, що усі ці значення належать ОДЗ. Дійсно, жодне з цих значень не є цілим, оскільки вони усі ірраціональні, тому $\{x\}\neq 0 \Rightarrow \{x\}\in(0;1) \Rightarrow \sin\{x\}\neq 0$. Крім того, оскільки рівність $\sin y=0$ виконується при $y=\pi n,\ n\in Z$, то рівність нулю при цілих y можлива лише при $y=0$. Помітимо, що при $k\geq 0$ $x=\frac{1}{2}\pi+\pi k>1$ і $[x]>0$, а при $k<0$ $x=\frac{1}{2}\pi+\pi k<-1$ і $[x]<0$. Таким чином усі знайдені x задовольняють рівняння.

10.2. Всередині правильного трикутника ABC вибрано точку M. Нехай точки M_1, M_2, M_3 симетричні їй відносно сторін BC, AC, AB трикутника відповідно. Доведіть, що сума векторів $\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_3}$ дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

(Терьошин Дмитро)

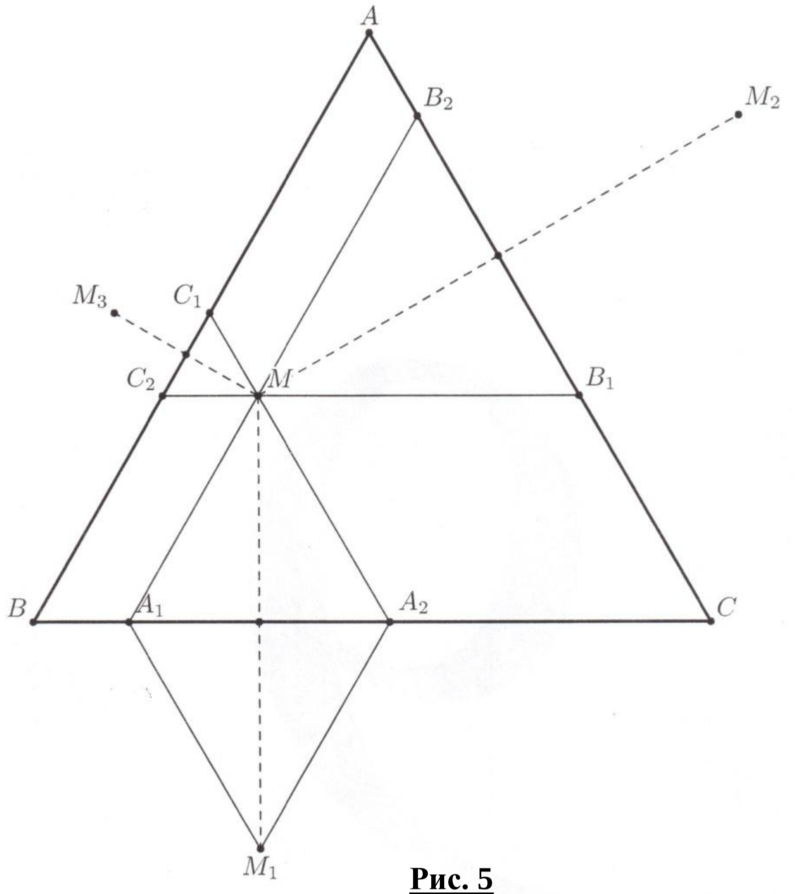

Рис. 5

Розв'язання. Проведемо через точку M прямі, паралельні до сторін трикутника ABC. Нехай вони перетинають сторони AB, BC, AC в точках C_1, C_2; A_1, A_2; B_1, B_2 відповідно (рис. 5). Отже, $C_1A_2 \parallel AC$, $A_1B_2 \parallel BA$, $B_1C_2 \parallel BC$, а також прямі C_1A_2, A_1B_2 та B_1C_2 перетинаються в точці M. Розглянемо ΔA_1MA_2. Очевидно, що він правильний. Пряма M_1M містить його висоту, бо є перпендикулярною до BC. Тоді M_1M - це подвоєння його медіани, тому $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}=\overrightarrow{MM_1}$, аналогічно $\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}=\overrightarrow{MM_2}$ та $\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}=\overrightarrow{MM_3}$. З іншого боку MC_1AB_2 - паралелограм, тому $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}$. Аналогічно $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC_2}+\overrightarrow{MA_1}$ та $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}$. Звідси й маємо шукане:

$$\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_3}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

10.3. Натуральні числа a, p задовольняють умову: $p=2^a-1$. Знайдіть усі значення a, для яких число $\frac{1}{2}(p^2+1)$ є квадратом цілого числа.

(Клурман Олексій)

Відповідь: $a=1$ та $a=3$.

Розв'язання. При $a=1$ маємо, що $p=1$ і $\frac{1}{2}(p^2+1)=1$ – задовольняє умову.

При $a=2$ маємо, що $p=3$ і $\frac{1}{2}(p^2+1)=5$ – умову не задовольняє.

Нехай тепер $a\geq 3$. Припустимо, що $\frac{1}{2}(p^2+1)=p_1^2$, тоді $p^2-2p_1^2=-1$. Підставимо значення p з умови: $2^{2a}-2^{a+1}+1-2p_1^2=-1$ або $2^{2a-1}-2^a=p_1^2-1$. Звідси $2^a(2^{a-1}-1)=(p_1-1)(p_1+1)$. Оскільки ліва частина рівності парна, то й права частина – парна. Тоді кожен з виразів у дужках є парним і $НСД(p_1-1;\ p_1+1)=2$. Таким чином, можливі такі випадки.

1) $p_1+1=2l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $k\geq 2$ $p_1\geq 2^a+1$ і $l\geq 2^{a-1}+1$, що суперечить рівності $kl=2^{a-1}-1$.

При $k=1$ $p_1=2^{a-1}+1$ і $l=2^{a-2}+1$ і $kl=2^{a-2}+1=2^{a-1}-1$. Звідси $a=3$.

2) $p_1-1=2k$, $p_1+1=2^{a-1}l$, при цьому $kl=2^{a-1}-1$.

При $l\geq 2$ $p_1\geq 2^a-1$ і $k\geq 2^{a-1}-1$, звідки $2^{a-1}-1=kl\geq 2^a-2$, звідки $a=1$.

При $l=1$ $p_1=2^{a-1}-1$ і $k=2^{a-2}-1$ і $kl=2^{a-2}-1=2^{a-1}-1$ – суперечність.

10.4. Заданий скінченний набір натуральних чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. За один хід дозволяється вибрати довільну пару чисел з тих, що залишились, менше з двох – вилучити, а більше – збільшити на 1. Яке найменше число можна одержати в кінці?

(Руденко Олександр)

<u>Відповідь</u>: найменше натуральне число t, для якого виконується нерівність $f(A)=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}\leq 2^t$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай задані числа задовольняють умови: $a_1\leq a_2\leq ...\leq a_n$. Визначимо для набора чисел $A=\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ функцію $f(A)=2^{a_1}+2^{a_2}+...+2^{a_n}$. Тоді при переході від набору $A=\{a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n\}$ до набору A', якщо були обрані числа $a_i\leq a_j$, маємо, що:

$$f(A')-f(A)=2^{a_j+1}-2^{a_i}-2^{a_j}=2^{a_j}-2^{a_i}\geq 0,$$

тобто функція f не спадає.

Позначимо через t найменше натуральне число, для якого з самого початку виконувалась нерівність $f(A)\leq 2^t$.

Доведемо, що якщо a - останнє число, що залишилось, то $a\geq t$.

Дійсно, якщо припустити супротивне, тобто що $a<t$, тобто $a\leq t-1$, то оскільки f не спадає, маємо, що $f(A)\leq f(\{a\})=2^a\leq 2^{t-1}$, що суперечить вибору числа t.

Покажемо, що якщо на кожному кроці вибирати пару найменших чисел, то наприкінці одержимо, що $a=t$. Дійсно, якщо ми прибираємо число a_1, а число a_2 замінюємо на a_2+1, то маємо, що

$$f(A')-f(A)=2^{a_2+1}-2^{a_1}-2^{a_2}=2^{a_2}-2^{a_1} \text{ або } f(A')=f(A)+2^{a_2}-2^{a_1}.$$

За побудовою числа t та вибором двох найменших чисел маємо, що

$$f(A)\leq 2^t \Leftrightarrow f(A)-2^{a_1}\leq 2^t-2^{a_2} \Leftrightarrow f(A)+2^{a_2}-2^{a_1}\leq 2^t \Leftrightarrow f(A')\leq 2^t.$$

Таким чином $a\leq t$, звідки остаточно маємо, що $a=t$.

11 клас

11.1. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;\ y)$, які задовольняють рівність:

$$\{x\}+\{y\}=[x+y].$$

Тут через $[a]$ *позначена ціла частина числа* a*, тобто найбільше ціле число, що не перевищує* a*, а через* $\{a\}$ *- дробова частина числа* a*, тобто* $\{a\}=a-[a]$.

(Рубльов Богдан)

Відповідь. $(n;\ -n)$, де $n\in Z$ та $(x; 1-x)$, де $x\notin Z$.

Розв'язання. Зрозуміло, що з умов задачі випливає, що число $\{x\}+\{y\}$ - ціле, а оскільки $0\le\{x\}<1$, то можливі два варіанти: $\{x\}+\{y\}=0$ або $\{x\}+\{y\}=1$. Розглянемо їх.

Варіант 1: $\{x\}+\{y\}=0$. Це означає, що $\{x\}=\{y\}=0$, а тому $x, y\in Z$. Але тоді $[x+y]=x+y=0$, звідси розв'язками є такі пари чисел: $(n;\ -n)$, де $n\in Z$.

Варіант 2: $\{x\}+\{y\}=1$. Звідси очевидно, що $x,\ y\notin Z$, бо якщо одне з них, наприклад, x ціле, то $\{x\}=0$, звідси $\{y\}=1$, що неможливо. Нехай тепер $x\notin Z$, тоді

$$x+y=[x]+\{x\}+[y]+\{y\}=[x]+[y]+1,$$

тобто $x+y$ - ціле число. Тоді $x+y=[x+y]=1$. Тобто у цьому випадку шуканими розв'язками є пари чисел $(x; 1-x)$, де $x\notin Z$.

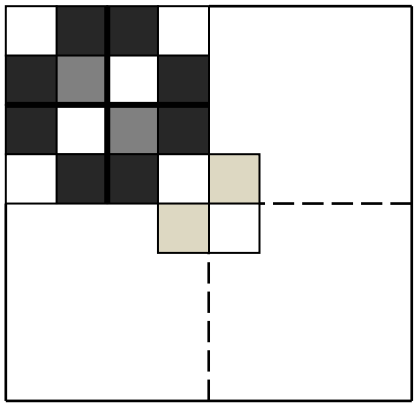

Рис. 6

11.2. Задача 10-3.

11.3. Є білий квадрат 8×8. За один хід Дмитро може вибрати повністю білий квадратик 2×2 та зафарбувати у чорний колір будь-які дві клітини цього квадратика, що розташовані по діагоналі. Яку максимальну кількість клітин за такими правилами Дмитро зможе зафарбувати?

(Петровський Дмитро)

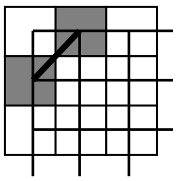

Рис. 7

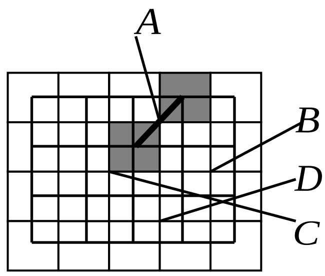

Рис. 8

Відповідь: 42.

Розв'язання. Спочатку покажемо, як досягти потрібної кількості зафарбувань. У кожному квадратику 4×4 проведемо фарбування у такій послідовності. Спочатку вибираємо усі чотири квадрати 2×2, на які розбивається квадрат 4×4, і фарбуємо там діагоналі, як це показане на рис. 6 (чорні квадратики). Після цього всередині утворюється повністю білий квадрат 2×2, у якому ми фарбуємо будь-яку з діагоналей (сірі квадратики). По завершенню фарбування усіх чотирьох квадратів 4×4 у самому центрі великого квадрату 8×8 утворився повністю білий квадратик 2×2, у якому ми фарбуємо ще дві клітини (світло сірі). Разом маємо, що зафарбованими стали: $10\cdot4+2=42$ квадратиків 1×1.

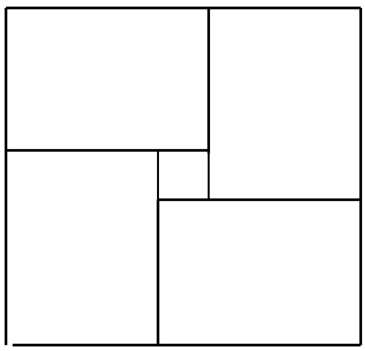

Рис. 9

Тепер покажемо, що більшу кількість зафарбувати не можна. Поряд із заданим квадратом 8×8 (назвемо його «заданим») розглянемо квадрат 7×7, утворений їх центрами (назвемо його «центральним»). Фарбування діагоналі квадрату 2×2 у заданому квадраті відповідає проведенню відповідної діагоналі у квадраті

1×1 центрального квадрату (рис. 7).

Тепер неважко побачити, що у двох сусідніх по стороні квадратах 1×1 центрального квадрату діагональ провести не можна. Розглянемо прямокутник 3×4 центрального квадрату, і покажемо, що в ньому не можна провести діагоналі рівно в половині квадратів. Якщо це так, то діагоналі будуть проведені у шести квадратиках 1×1. Виберемо чотири квадрати A, B, C, D, у яких проведені діагоналі і серед них немає кутових (рис. 8). Покажемо, що в усіх них одночасно діагональ провести неможливо. Нехай, наприклад, першою було проведена діагональ (тобто пофарбовані дві діагональні клітинки у заданому квадраті) у квадраті A, наприклад, у тому напрямі, як це показане на рис. 8. Тоді у квадраті C провести діагональ неможливо. Таким чином, у прямокутнику 3×4 можна провести максимум 5 діагоналей. Тепер розіб'ємо весь центральний квадрат 7×7 на чотири прямокутники 3×4 та квадратик 1×1, як це показане на рис. 9. Тоді максимум можна провести $5\cdot4+1=21$ діагональ, що відповідає зафарбуванню як раз 42 клітин.

11.4. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ з кутами ABC та BCD рівними $120°$, O - точка перетину діагоналей, M - середина сторони BC, K - точка перетину відрізків MO та AD. Відомо, що $\angle BKC=60°$. Доведіть, що $\angle BKA=\angle CKD=60°$.

(Сердюк Назар)

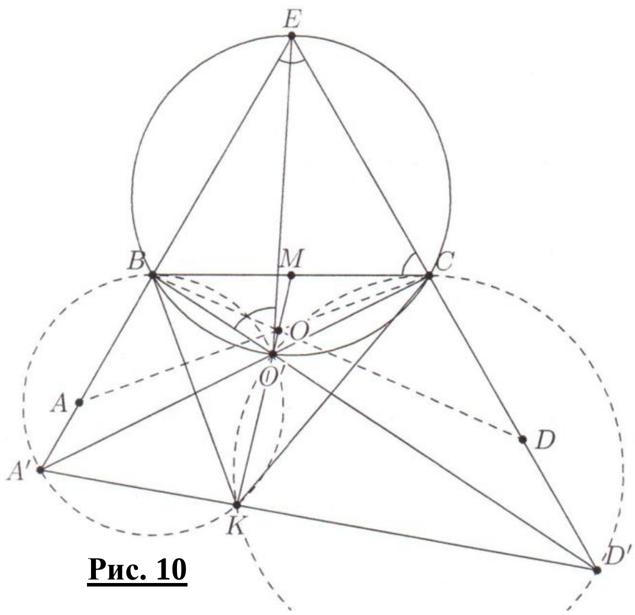

Рис. 10

Розв'язання. Нехай прямі AB та CD перетинаються в точці E. За умовою $\angle BKC=60°$. Доведемо, що $BK>\frac{1}{2}BC$. Справді, один з кутів $\angle KBC$ чи $\angle KCB$ не менше $60°$. Не обмежуючи загальності, припустимо, що це $\angle KBC$ (рис. 10). Тоді у ΔBMK $\angle KBM\ge60°=\angle BKC>\angle BKM$. Звідси $MK>BM$, отже на відрізку BK знайдеться така точка O', що $MK\cdot MO'=BM^2=MC^2$. Тоді описані кола $\Delta BO'K$ та $\Delta CO'K$ дотикаються до BC. Отже, $\angle BKM=\angle O'BC$, $\angle CKM=\angle O'CB$. Тоді

$$\angle BO'C=180°-\angle O'BC-\angle O'CB=180°-\angle BKM-\angle MKC=180°-60°=120°$$

Тоді точка O' належить описаному колу ΔEBC. Нехай пряма BO' перетинає CE у D', а CO' перетинає BE у точці A'. З вписаності чотирикутника $BECO'$ маємо, що (рис. 1)

$$\angle BO'E=\angle BCE=60°=\angle EBC=\angle EO'C.$$

Розглянемо трикутники $\Delta O'EB$ та $\Delta EBD'$. У них дві пари кутів рівні. Отже в третій парі кути рівні, тобто $\angle BEO'=\angle ED'B$. Тоді $\angle BEO'=\angle BCO'=\angle CKO'=\angle ED'B$. Звідси точка D' належить описаному колу трикутника $\Delta KO'C$. Аналогічно, точка A' належить описаному колу трикутника $\Delta BKO'$. Тоді $\angle A'KB=\angle A'O'B=60°=\angle CO'D'=\angle CKD'$. Це означає, що точки A', K та D' лежать на одній прямій.

Точка O лежить десь на відрізку MK. Якщо ця точка всередині відрізка MO', то точка A лежить всередині відрізка $A'B$, а D - всередині CD'. Тоді точка K лежить строго за межами трикутника ΔEAD, але за умовою точка K належить відрізку AD і маємо суперечність. Аналогічно, якщо точка O розташована поза MO', то точки A, D лежать поза відрізками EA' та ED', тобто точка K лежить строго всередині трикутника ΔEAD, знову маємо суперечність. Це означає, що $O=O'$. Тоді $A=A'$ та $D=D'$. А вже було доведено вище, що $\angle A'KB=\angle CKD'=60°$, що і треба було довести, оскільки $A=A'$ та $D=D'$.