Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

LIV Всеукраїнська олімпіада юних математиків

До тебе, Господи, взиваю
І сподівання щирі маю –
Що Україна вільна буде
Від лицемірства і облуди,
Від бездуховності й зневіри
Людців, душею зачерствілих,
Від злої долі та безправ'я,
І тих, які завжди лукавлять,
Від нетерпимості і зради,
Ярма грошей, полону влади;
Від фарисейства лже-героїв
І збайдужілості людської;
Від тих, хто дух вкраїнський нищить,
Забувши все святе та вище,
І наче круків хижа зграя
Вкраїну навпіл розривають,
Розбрату сіючи в нас зерна...
Від всього зла, всієї скверни
Зціли, Всевишній нас Владико,
Щоб вільним став народ великий!!!

Наталія Крісман, Львів

Київ–2014

Перший день

8 клас

8.1. Відомо, що до натурального числа n можна дописати справа будь-яку ненульову цифру c і одержане число буде ділитися націло на c. Знайдіть найменше значення, яке може приймати число n.

(Рубльов Богдан)

***Відповідь*:** $n = 252$.

***Розв'язання*.** Помітимо, що якщо к числу n дописати справа цифру c, то ми отримаємо число $10n + c$. Для того, щоб це число ділилось на c, необхідно й достатньо, щоб $10n$ ділилося на c. Тобто, для того, щоб виконувалась умова необхідно, щоб $10n$ ділилося на всі натуральні число від 1 до 9. Для будь-якого натурального n число $10n$ буде ділитися на 1, 2 та 5. Для подільності на інші числа, необхідно й достатньо, щоб число n ділилося на 4, 7 та 9. Але тоді воно повинно ділитись на $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$, тому менше ніж 252 число n бути не може. Нескладно переконатися, що число 252 умову задовольняє, а тому є шуканим.

8.2. Два кола γ_1 та γ_2 однакового радіуса перетинаються у точках A та B. Коло γ, з центром у точці A, перетинає коло γ_1 у точках C та D. Доведіть, що точки перетину кіл γ та γ_2 належать прямим BC та BD.

(Білецький Юрій)

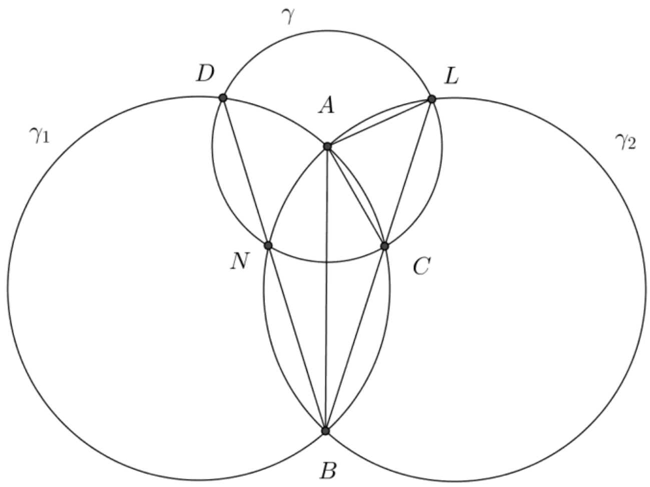


рис. 1

***Розв'язання*.** Позначимо через L та N точки перетину γ та γ_2, причому можемо вважати, що точки C та L лежать по одну сторону прямої AB, а точки D та N по іншу (рис. 1). Тоді очевидно, що $AC = AL$, оскільки це радіуси кола γ. Оскільки кола γ_1 та γ_2 мають однаковий радіус, то вписані кути ABC та ABL цих кіл спираються на однакові хорди, тому вони є рівними. З рівності цих кутів і випливає твердження задачі.

8.3. Чи існують натуральні числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$, для яких справджується рівність:

$$a_1 \cdot 2013^{a_1} + a_2 \cdot 2013^{a_2} + \ldots + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} = a_{2014} \cdot 2013^{a_{2014}}\ ?$$

(Рубльов Богдан)

***Відповідь*:** таких чисел не існує.

***Розв'язання*.** Без обмеження загальності можемо вважати, що $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2013} < a_{2014}$, звідки випливає, що $a_{2013} + 1 \le a_{2014}$. Тому

$$a_1 \cdot 2013^{a_1} + a_2 \cdot 2013^{a_2} + \ldots + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} \le$$

$$\le a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} + \ldots + a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} =$$

$$= 2013 \cdot a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}} = a_{2013} \cdot 2013^{a_{2013}+1} < (a_{2013}+1) \cdot 2013^{a_{2013}+1} \le a_{2014} \cdot 2013^{a_{2014}}.$$

Звідси й випливає, що таких наборів не існує.

8.4. ***а)*** Чи можна обійти клітчасту дошку 4×6 ходом шахового коня таким чином, щоб побувати на кожному полі рівно 1 раз?

б) Чи можна при цьому це зробити так, щоб з останнього поля можна було ходом коня попасти на початкове?

Шаховий кінь може піти на будь-яке поле дошки якщо воно розташоване на іншому кінці української літери „Г", тобто спочатку кінь пересувається на дві клітини по горизонталі чи по вертикалі, а далі на одну клітину перпендикулярно початковому напряму).

1	**20**	**5**	**16**	**9**	**14**
4	**23**	**2**	**13**	**6**	**17**
21	**12**	**19**	**8**	**15**	**10**
24	**3**	**22**	**11**	**18**	**7**

Рис. 2

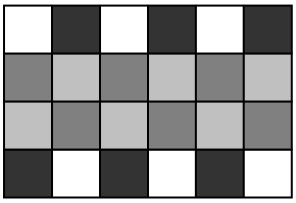


Рис. 3

Відповідь*: *а) можна; ***б)*** не можна.

Розв'язання*. *а) Шуканий приклад наведений на рис. 2.

б) Доведемо методом від супротивного. Припустимо відповідний обхід існує. Розфарбуємо клітини дошки у 4 кольори, як це показано на рис. 3. Позначимо кольори – Б (білий), Ч (чорний), Т (темно сірий) та С (світло сірий). Клітин кожного кольору по 6. Бачимо, що з клітини Ч можна попасти лише у клітину С, а також у клітину Ч можна попасти тільки з клітини С. Аналогічно пов'язані кольори Б та Т: з клітин Б можна попасти тільки на клітини Т, а також на Б можна попасти лише з Т. Випишемо ланцюжок ходів, який обходить дошку потрібним чином. Тоді буква Ч повинна оточуватись з обох боків буквами С. Так само для букв Б, які повинні оточуватись буквами Т, при умові, що це не перша чи остання клітина маршруту. Оскільки кожної з букв на дошці рівна кількість, то кожна буква Ч не може бути не крайньою, бо тоді 6 літер Ч повинні оточуватись принаймні 7 буквами С, а їх усього 6. Таким чином – Ч та Б повинні бути крайніми у цьому ланцюгу. За припущенням з останньої клітини можна попасти на першу, але якщо вони мають кольори Ч та Б – це неможливе. Одержана суперечність завершує доведення.

9 клас

9.1. Задача 8–2.

9.2. Андрій та Олеся грають у таку гру. Спочатку Андрій розставляє по колу усі 10 цифр. Після цього Олеся вибирає цифру, і від цієї цифри рухається по колу за рухом годинникової стрілки, групуючи послідовно цифри по 2. Таким чином утворюються 5 двоцифрових чисел (число на кшталт 06 також враховуємо як одноцифрове число 6). Після цього Олеся додає ці 5 чисел і виграє одержану суму у Андрія. Який найменший програш може гарантувати собі Андрій?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 252.

Розв'язання. Після того, як Андрій виставить свої 10 цифр по колу, у Олесі є два варіанти обрати п'ятірку чисел. Наприклад, якщо по колу у порядку за годинниковою стрілкою записані такі цифри: $a_0, a_1, \ldots, a_9$, то вона може обрати одну з двох сум:

$$S_1=\overline{a_0a_1}+\overline{a_2a_3}+\ldots+\overline{a_8a_9} \text{ або } S_2=\overline{a_9a_0}+\overline{a_1a_2}+\ldots+\overline{a_7a_8}.$$

Зрозуміло, що вона обере більше значення з двох.
Тепер зауважимо, що

$$S_1+S_2=\overline{a_0a_1}+\overline{a_1a_2}+\ldots+\overline{a_8a_9}+\overline{a_9a_0}=10(a_0+a_1+\ldots+a_9)+(a_0+a_1+\ldots+a_9)=$$
$$=11\cdot(a_0+a_1+\ldots+a_9)=11\cdot 45=495.$$

Таким чином сума цих двох варіантів однакова. Оскільки вона обирає більше з цих чисел, то Андрій повинен таким чином розставити цифри, щоб різниця між цими числами була найменшою з можливих. Тоді найбільше з двох чисел і буде найменшим.
Тепер побачимо, що

$$S_1=\overline{a_0a_1}+\overline{a_2a_3}+\ldots+\overline{a_8a_9}=10(a_0+a_2+\ldots+a_8)+(a_1+a_3+\ldots+a_9)=$$
$$=9(a_0+a_2+\ldots+a_8)+(a_0+a_1+\ldots+a_9)=9(a_0+a_2+\ldots+a_8)+45\,\vdots\,9.$$

Тобто, кожна з сум кратна 9, а тому їх різниця так само повинна бути кратною 9. Оскільки сума цих чисел непарна, то рівними вони не можуть бути, тому найменша можлива різниця між ними – це 9. Тобто ці числа повинні дорівнювати 252 та 243.
Таким чином, залишається навести приклад розстановки чисел, щоб саме такі два числа могла одержати Олеся. Оскільки $98+76+54+21+03=252$, то по колу Андрій може розставити числа, наприклад, таким чином: $9, 8, 7, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 3$.

9.3. Нехай $a,b>0$ дійсні числа. Відомо, що $\left(a^2+b^2\right)\left(a-b+1\right)\ge b$. Доведіть, що $a\left(a+b\right)\ge b$.

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Очевидно, що при $a\ge 1$ нерівність виконується. Нехай $a<1$ і припустимо, що $a\left(a+b\right)<b$. В такому випадку $b>\frac{a^2}{1-a}$. Доведемо, що початкова нерівність не виконується. Якщо вона правильна, то

$$a^3+a^2\ge b^3-b^2+b-ab^2+ba^2=$$
$$=b(b-1)^2+(1-a)b^2+ba^2>b(b-1)^2+2ba^2>\tfrac{a^2(b-1)^2}{1-a}+2ba^2.$$

Оскільки $a>0$, то

$$1+a>\tfrac{(b-1)^2}{1-a}+2b,\ 1-a^2>\left(b-1\right)^2+2b\left(1-a\right)=b^2+1-2ab,$$

звідки $0>b^2+a^2-2ab=\left(a-b\right)^2$ – суперечність. Отже, $b\le\frac{a^2}{1-a}$, що і треба було довести.

9.4. Яку найбільшу кількість кутиків з трьох клітинок (рис. 4) можна розмістити всередині клітчастого квадрата 7×7 так, щоб вони попарно не дотикалися сторонами? (Дотикання кутами припускається.)

(Чорний Максим)

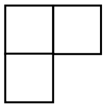


Рис. 4

Відповідь: 9.
Розв'язок. Приклад для 9 кутів зображено на рис. 5.
Доведемо, що більшу кількість кутів розмістити не вдасться. Припустимо, що ми розмістили 10 кутиків так, щоб вони задовольняли умові. Розглянемо кожен з них. Пофарбуємо наступні відрізки, як це показано на рис. 6 – тут сторону маленького квадрату вважаємо рівною $\frac{1}{2}$, тобто ми одиничні квадрати розбили на 4 менших рівних квадратики.
Для кожного з кутиків загальна довжина пофарбованих відрізків складає 11, тому їх загальна довжина складає 110. При цьому, як легко зрозуміти, в жодної пари кутиків немає спільних

пофарбованих відрізків, але відрізки можуть виходити за межі квадрату (а саме ті, що йдуть з середніх сторін).

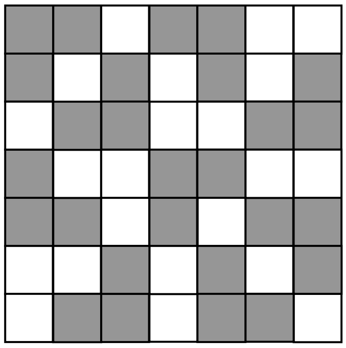


Рис. 5

Тепер розглянемо одну з сторін великого квадрату. Пофарбуємо на ній всі відрізки, які не належать сторонам кутиків – їх загальна довжина як мінімум 2, що неважко зрозуміти з того, що кутики не можуть дотикатися сторонами, а їх найбільша сторона дорівнює 2; очевидно, що вони не були пофарбовані раніше. Також зітремо всі відрізки, які виходять з середин двоклітинних сторін кутиків і виходять за межі квадрата, причому один кінець яких лежить на цій стороні квадрата – оскільки таких кутиків для даної сторони не більше 2, то загальна довжина стертих відрізків буде не більше 1. Таким чином, сумарна довжина відрізків зросла не менш, ніж на 1. Оскільки є всього 4 сторони квадрата, то вона зросла мінімум на 4 і стала мінімум 114. Але всі відрізки тепер йдуть по лініям сітки квадрата, не співпадають і не виходять за його межі. Але у такому випадку їх довжина не може бути більше за сумарну довжину всіх ліній сітки квадрата, а саме $2\cdot7\cdot8=112<114$. Суперечність.

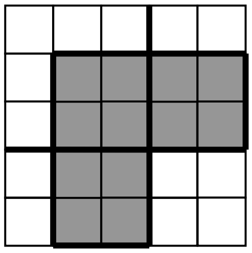


Рис. 6

10 клас

10.1. Для якого найбільшого натурального n існує набір з n натуральних чисел, який має таку властивість: серед чисел набору рівно одне число ділиться на n, рівно два числа діляться на $n-1$, і так далі, рівно $n-1$ число з цього набору ділиться на 2 і усі n чисел діляться на 1?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $n=5$.

***Розв'язання*.** Спочатку наведемо шуканий приклад для $n=5$. Наприклад, умову задовольняють такі числа: $60; 12; 6; 2; 1$.

Припустимо такий набір існує при $n\geq6$. Тоді $n-1$ число ділиться на 2, $n-2$ числа діляться на 3. Тобто одне число не ділиться на 2 і два не діляться на 3, тому максимум три числа не діляться на 6, тому мінімум $n-3$ числа кратні 6, але за умовою їх повинно бути рівно $n-5$. Одержана суперечність завершує доведення.

10.2. Коло γ описане навколо гострокутного трикутника ABC, AD та AL – його висота та бісектриса відповідно. Позначимо через W, T, A' другі точки перетину з колом γ прямих AL, WD, TL відповідно. Доведіть, що AA' – діаметр кола γ.

(Рожкова Марія)

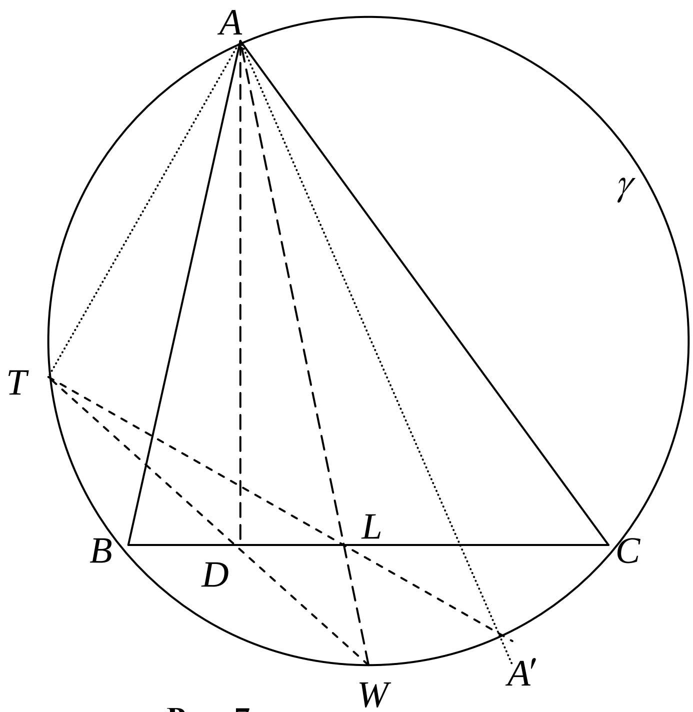


Рис. 7

Розв'язання. Якщо $AB = AC$, то твердження очевидне. Інакше, спочатку покажемо, що $\angle TAL = \angle TDB$ (рис. 7). Дійсно,

$$\angle TAL = \tfrac{1}{2}\cup WT\ ,\ \angle TDB = \tfrac{1}{2}(\cup TB + \cup WC) = \tfrac{1}{2}(\cup TB + \cup WB) = \tfrac{1}{2}\cup TW$$

оскільки AL – бісектриса, тому $\angle BAW = \angle WAC$, звідки $\cup WC = \cup WB$. З доведеної рівності $\angle TAL + \angle TDL = 180°$, тому точки A, T, D, L лежать на одному колі. Тоді $\angle A'TA = \angle LTA = LDA = 90°$, звідки й випливає потрібне твердження.

10.3. Чи існує геометрична прогресія натуральних чисел $b_0, b_1, \ldots, b_{2014}$ із знаменником відмінним від 10, яка задовольняє таку умову: число b_{i+1} має у своєму десятковому записі рівно на одну цифру більше, ніж число b_i для усіх i від 0 до 2013?

(Рубльов Богдан)

Відповідь. існує.

Розв'язання. Розв'яжемо задачу для довільного скінченого натурального n і прогресії $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Виберемо $b_0 = 10^{kn}$, де натуральний параметр k визначимо пізніше, та $q = \frac{10^{k+1}+1}{10^k}$. Тоді

$$b_i = b_0 q^i = \frac{10^{kn}(10^{k+1}+1)^i}{10^{ki}} = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i,\ 0 \le i \le n.$$

Для того, щоб виконувались умови задачі, достатньо, щоб $\forall i = \overline{0,\, n}$ виконувалась умова:

$$10^{kn+i} \le b_i = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i < 10^{kn+i+1}.$$

Спочатку покажемо, що ліва нерівність справджується $\forall k \in N$, дійсно

$$10^{kn+i} = 10^{kn-ki} \cdot 10^{ki+i} < 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i = b_i.$$

Тепер знайдемо за яких умов може справджуватись права нерівність.

$$b_i = 10^{kn-ki}(10^{k+1}+1)^i < 10^{kn+i+1} \Leftrightarrow (10^{k+1}+1)^i < 10^{ki+i+1} \Leftrightarrow (10^{k+1}+1)^i < 10^{(k+1)i} \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10^{k+1}+1}{10^{k+1}}\right)^i < 10 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^i < 10.$$

Якщо вибрати k, що задовольняє умову $i \le 10^{k+1}$, то будемо мати таку нерівність:

$$\left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^i \le \left(1 + \frac{1}{10^{k+1}}\right)^{10^{k+1}} < 10.$$

Для її доведення, якщо не використовувати властивості послідовності $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, можна провести такі міркування при $m = 10^{k+1}$:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{m}C_m^1 + \frac{1}{m^2}C_m^2 + \frac{1}{m^3}C_m^3 + \ldots + \frac{1}{m^m}C_m^m <$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{m!} <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < 3 < 10.$$

Таким чином, щоб ця нерівність справджувалась $\forall i = \overline{0,\, n}$, треба щоб виконувалась нерівність $n \le 10^{k+1}$. Це є достатньою умовою для вибору потрібного значення k.

Тепер повернемось до початкової задачі, у якій $n = 2014$. Достатньо обрати $k = 3$. Оскільки $2014 < 10000 = 10^4$, то для прогресії з нульовим членом $b_0 = 10^{3 \cdot 2014} = 10^{6042}$ та знаменником $q = \frac{10001}{1000}$ виконуються потрібні умови.

Альтернативне розв'язання. Нехай, як і раніше, q – знаменник прогресії. Нехай для деякого натурального k виконується умова: $b_0 = 10^k$. Для існування шуканої прогресії достатньо існування такого q, щоб виконувались умови:

$$10^{k+i} \le b_0 q^i < 10^{k+i+1},\ b_0 q^i \in N,\ i = \overline{0,\ 2014}. \qquad \textbf{(1)}$$

Тоді, з урахуванням значення b_0, першу умову можна записати таким чином:

$$10^i \le q^i < 10^{i+1} \text{ або } 10 \le q < 10^{\frac{i+1}{i}},\ i = \overline{0,\ 2014}. \qquad \textbf{(2)}$$

Підберемо q таким, що задовольняє умову $10 < q < 10^{\frac{2015}{2014}}$. Тоді автоматично виконуються умови **(2)**, оскільки $q < 10^{\frac{2015}{2014}} < 10^{\frac{i+1}{i}} \Leftrightarrow \frac{2015}{2014} < \frac{i+1}{i}$, а остання нерівність для натуральних i просто перевіряється. Для цього достатньо знаменник прогресії q шукати у такому вигляді:

$$q = 10,\underbrace{00\ldots0}_{p}1 = 10 + 10^{-p-1}.$$

Зрозуміло, що таке p існує, бо $10^{\frac{2015}{2014}} > 10$, а $q = 10,\underbrace{00\ldots0}_{p}1 \to 10$ при $p \to \infty$, тому знайдеться шукане значення p.

Тепер залишається досягти умови натуральності членів прогресії, тобто $b_0 q^i \in N$, тут достатньо вибрати $b_0 = 10^{2014\cdot(p+1)}$.

Твердження доведене.

10.4. Нехай є зв'язний граф з вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Позначимо $d_{i,j}$ – найменшу кількість ребер, які необхідно пройти, щоб дістатися з вершини A_i у вершину A_j. Знайдіть найбільше можливе значення суми: $D = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} d_{i,j}$.

Відповідь. $\frac{1}{6} n(n^2 - 1)$.

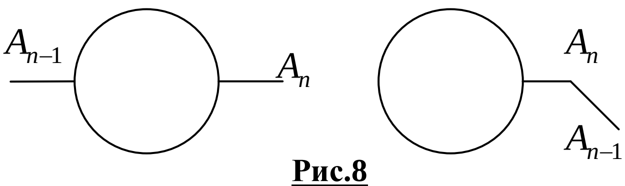


Рис.8

Розв'язання. Розглянемо такий граф, що має максимальне значення D (або один з таких графів). Якщо в цьому графі є цикл, то вилучимо з нього ребро, граф залишиться зв'язним, а величина D принаймні не зменшується. Продовжуючи таким чином, одержимо зв'язний граф без циклів, тобто дерево. Відомо, що в такому графі знайдеться хоча б дві висячі вершини (тобто вершини степінь яких дорівнює 1).

Позначимо дві висячі вершини A_n та A_{n-1}. Нехай

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n-2} d_{n,j} \ge \beta = \sum_{j=1}^{n-2} d_{n-1,j}.$$

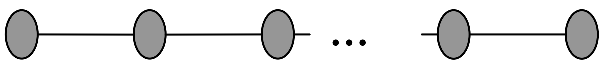


Рис. 9

Позначимо $d = d_{n,n-1}$. Перемалюємо граф таким чином, як показано на рис. 8. Обчислимо, як зміниться при цьому значення D.

$$\Delta = \alpha + n - 2 + 1 - \beta - d = (\alpha - \beta) + (n - 1 - d).$$

Оскільки $\alpha \ge \beta$, то $\Delta \ge (n-1) - d$. І якщо тепер $d < n-1$, то ми можемо збільшити D. Оскільки нескінченно довго ми не можемо збільшувати D, то ми прийдемо до випадку

$d = n-1$, але тоді граф – ланцюг рис. 9. Тому $D \le \sum\limits_{1\le i<j\le n} |i-j|$ і це значення досягається на ланцюгу. Залишається його обчислити:

$$D \le \sum_{1\le i<j\le n} |i-j| = 1 + (1+2) + \ldots + (1+2+\ldots+(n-1)) = \tfrac{n(n^2-1)}{6}.$$

11 клас

11.1. Знайдіть усі значення параметру a, при яких нерівність

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{a-x^2} \le \sqrt{2x-2x^2}$$

має єдиний розв’язок у дійсних числах.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $a \in \{0, 1\}$.

Розв’язання. Якщо позначити три вирази

$$A = x-a,\ B = a-x^2 \text{ та } C = 2x-2x^2,$$

то з умов задачі маємо такі дві умови:

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} \le \sqrt{C} \text{ та } 2A+2B = C.$$

Після піднесення до квадрату нерівності одержимо, що

$$A + 2\sqrt{AB} + B \le C = 2A+2B \Leftrightarrow 2\sqrt{AB} \le A+B.$$

Остання нерівність виконується при усіх можливих значеннях A, B. Таким чином розв'язком нерівності є її ОДЗ. Воно задається такими трьома нерівностями:

$$x \ge a,\ a \ge x^2 \text{ та } x \ge x^2.$$

Зрозуміло, що $a \ge 0$, крім того справджується умова: $a \le \sqrt{a} \Rightarrow a \in [0; 1]$. За таких значень параметра a розв’язком нерівності є множина $a \le x \le \sqrt{a}$, таким чином єдиний розв’язок цієї нерівності буде за умови $a = \sqrt{a}$, тобто $a \in \{0, 1\}$.

11.2. Задача 10–2.

11.3. Для яких натуральних $n \ge 3$ існує набір прямокутників $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, які мають таку властивість: будь-який з цих прямокутників можна покрити усіма іншими $n-1$-м прямокутником з цього набору, але не можна покрити ніякими $n-2$-ма іншими прямокутниками з цього набору? (Прямокутники можна розташовувати в будь-якому з двох положень, при яких їх сторони є паралельними двом заданим перпендикулярним прямим).

Відповідь: Для довільного n.

Розв’язання. Нехай прямокутники мають розміри $a_i \times b_i,\ i = \overline{1, n}$. Для виконання умови необхідно, щоб сторони прямокутників задовольняли нерівностям:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1.$$

Покажемо далі, що достатньо щоб вони задовольняли такі умови:

$$b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} < b_1 \le b_2 + b_3 + \ldots + b_n, \qquad \textbf{(1)}$$

$$b_3 + b_4 + \ldots + b_n < b_2 \le b_3 + b_4 + \ldots + b_n + a_1, \qquad \textbf{(2)}$$

$$b_4 + b_5 + \ldots + b_n + a_2 < b_3 \le b_4 + b_5 + \ldots + b_n + a_1 + a_2,$$

$$a_1 + a_2 < a_3,$$
$$b_5 + \ldots + b_n + a_2 + a_3 < b_4 \le b_5 + \ldots + b_n + a_1 + a_2 + a_3,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 < a_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{k+1} + \ldots + b_n + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1} < b_k \le b_{k+1} + \ldots + b_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}, \qquad \textbf{(3)}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} < a_k, \qquad \textbf{(4)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} < b_{n-1} \le b_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} < a_{n-1}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} = a_n. \qquad \textbf{(5)}$$

Пара нерівностей **(3)**, **(4)** гарантує, що прямокутник $a_k \times b_k$ не вдасться покрити менш ніж $n-1$-м прямокутником, а $n-1$-м – вдасться. Пояснимо, чому це так. Будемо говорити, що прямокутник розташовано *горизонтально*, якщо його горизонтальна сторона не коротша за

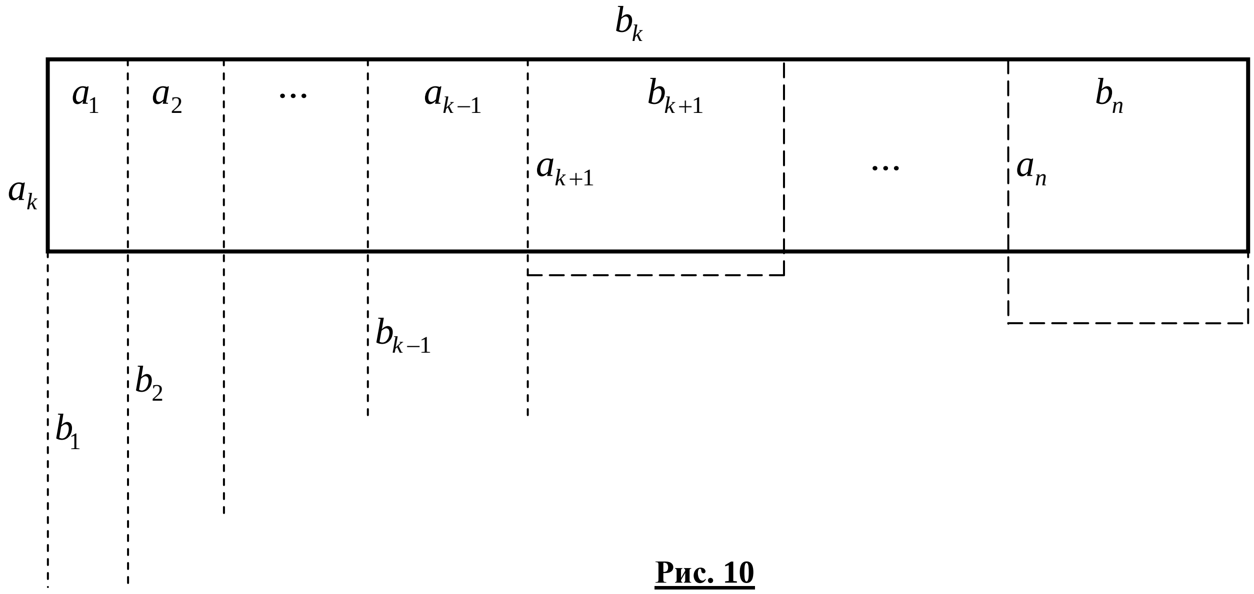


Рис. 10

вертикальну, й *вертикально* у протилежному випадку. Будемо вважати, що прямокутник $a_k \times b_k$ розташовано горизонтально. Тоді прямокутниками, що залишилися його можна покрити наступним чином (рис. 10). З іншого боку, меншої кількості прямокутників не вистачить. Дійсно, якщо якісь з прямокутників $a_1 \times b_1$, …, $a_{k-1} \times b_{k-1}$ розташовувати не вертикально, а горизонтально, то довжин їх вертикальних сторін не вистачить, щоб покрити вертикальну сторону прямокутника $a_k \times b_k$, оскільки справджується нерівність **(4)**, а тоді всередині нього непокритою все одно залишиться деяка смужка довжиною b_k, яку іншими прямокутниками покрити не вдасться. А тоді, максимальна сума горизонтальних сторін буде як раз

$$b_{k+1} + b_{k+2} + \ldots + b_n + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k-1},$$

що за умовою **(3)** менше ніж b_k.

Набір прямокутників, що задовольняє нашим нерівностям, можна побудувати наступним чином. Спочатку послідовно обираємо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ так, щоб виконувались нерівності **(4)** при усіх $k = \overline{2.\, n-1}$ й a_n з умови **(5)**. Далі виберемо $b_n = a_n$, після чого послідовно будемо обирати числа $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_3$ так, щоб вони задовольняли нерівностям **(3)** при $k = \overline{3,\, n-1}$, а далі число b_2, що задовольняє умову (2) та число b_1 з нерівності **(1)**.

11.4. Чи для довільної скінченної підмножини A натуральних чисел існує просте число p таке, що для кожного числа a, що належить A, знайдеться натуральне число x таке, що $x^2 - a \vdots p$, але x не ділиться націло на p?

(Ківва Богдан).

Відповідь. так, для довільної.

Розв'язання. Покажемо, що для довільної скінченної підмножини існує потрібне p. Нехай T – множина всіх тих простих чисел, які є дільниками хоча б одного числа з A. Так, як множина A – скінченна, то T – теж скінченна. За теоремою Діріхле існує просте число вигляду $p = k \cdot \left(4 \cdot \prod_{q \in T} q\right) + 1$. Покажемо, що це просте число нам підходить.

З визначення p випливає, що для довільного $q \in T$ символ Лежандра $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{1}{q}\right) = 1$. p дає остачу 1 по модулю 4, тому перша частина рівності слідує з квадратичного закону взаємності Гауса, а друга з того, що p дає остачу 1 по модулю q. Отже, кожне просте число з множини T є квадратичним лишком по модулю p. Але ж кожен елемент з A є добутком якихось елементів з T, тому сам є квадратичним лишком, а це і вимагалося від p.

Другий день

8 клас

8.5. Є $n \geq 3$ мишачих нірок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Миші грають у таку гру. Вони повинні по черзі вибігати із своїх нірок і бігти строго по прямій до однієї з тих нірок, які знаходяться на максимальній відстані від їх власної нори. Миша, шлях якої має перетнути в деякій точці, відмінній від нори, шлях іншої миші, що вже пробігла перед цим, залишається на місці. Порядок, за яким вони бігають, миші вибирають на свій розсуд.

а) Яка максимальна кількість мишей зможе пробігти свій шлях за таких умов?

б) Яка мінімальна кількість мишей має пробігти свій шлях за таких умов?

(Лисакевич А., Рубльов Б.)

Відповідь: ***а)*** n; ***б)*** 1, для $n \neq 3$ та 2, для $n = 3$.

Розв'язання. ***а)*** Нехай $\Delta A_1A_2A_3$ – рівносторонній трикутник (рис. 11), точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$ розташовані на дузі кола маленького радіуса біля основи висоти, проведеної з вершини A_3. Тоді спочатку проводяться $n-3$ відрізки A_3A_j, $j = \overline{4, n}$, які показують маршрут мишей $A_4, A_5, \ldots, A_n$. А далі миша A_1 біжить до норки A_2, миша A_2 біжить до норки A_3, миша A_3 біжить до норки A_1.

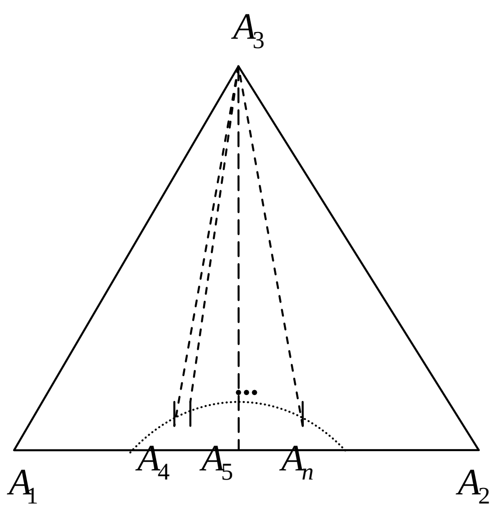


Рис. 11

б) Нехай $n \geq 4$. Розглянемо розташування мишей на колі радіуса 1. При цьому миші A_1 та A_2 утворюють горизонтальний діаметр (рис. 12).

Точка A_3 розташована у нижній точці цього кола, решта точок $A_4, A_5, \ldots, A_n$ розташовані на колі біля точки, що діаметрально протилежна то точки A_3. Тоді зрозуміло, що якщо першою пробіжить миша з норки A_1, то вона прокреслить діаметр $A_1 A_2$. Після цього за правилами жодна миша пробігти вже не зможе, оскільки найвіддаленішою для A_2 є миша A_1, для мишей $A_4, A_5, \ldots, A_n$ – A_3, а для A_3 – одна з мишей $A_4, A_5, \ldots, A_n$. Кожен з таких відрізків перетинає вже проведений діаметр $A_1 A_2$, а тому не може бути проведений.

Для $n = 3$ зрозуміло, що жодні 3 відрізки не перетинаються по внутрішніх точках, а тому буде проведено як мінімум 2 відрізки.

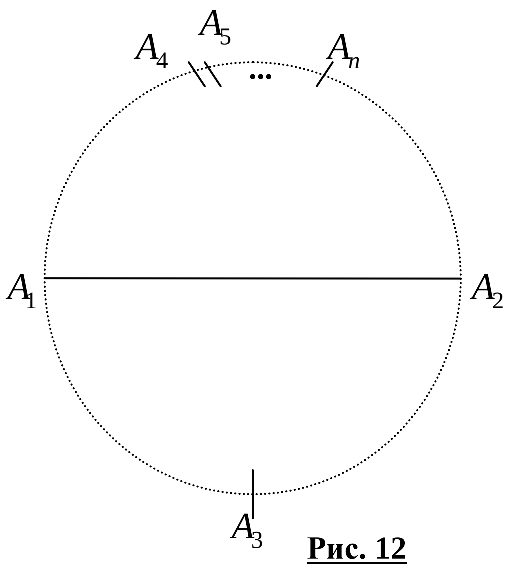


Рис. 12

8.6. Знайдіть усі квадратні тричлени $f(x) = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами a, b, c, які для кожного дійсного числа x задовольняють нерівності:

$$\tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2016 \le f(x) \le \tfrac{3}{2}x^2 + 6x + 2020.$$

(Анікушин Андрій)

Відповідь: $f(x) = (x+2)^2 + 2014 = x^2 + 4x + 2018$.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати у кожному квадратному тричлену і будемо мати, що для усіх дійсних x повинні виконуватись такі нерівності:

$$\tfrac{1}{2}(x+2)^2 + 2014 \le f(x) \le \tfrac{3}{2}(x+2)^2 + 2014.$$

Зрозуміло, що парабола повинна мати такий вигляд: $f(x) = a(x+2)^2 + 2014$, оскільки в точці $f(-2) = 2014$ і вона повинна мати в точці $x = -2$ вершину. Значення в точці очевидне з наведених нерівностей. Якщо ж вершина не в цій точці, то парабола приймає значення і менше ніж 2014, що суперечить заданій нерівності. Таким чином $f(x) = a(x+2)^2 + 2014$, звідки для усіх дійсних x повинно справджуватись умова: $\tfrac{1}{2}(x+2)^2 \le a(x+2)^2 \le \tfrac{3}{2}(x+2)^2$. Зрозуміло, що єдине ціле значення, що йому задовольняє – це $a = 1$ і шукана парабола має вигляд:

$$f(x) = (x+2)^2 + 2014 = x^2 + 4x + 2018.$$

8.7. Про прості числа p, q, r відомо, що числа $pq+1$, $pr+1$, $qr-p$ – є точними квадратами цілих чисел. Доведіть, що число $p + 2qr + 2$ – теж точний квадрат цілого числа.

(Чорний Максим)

Розв'язання. Нехай $pq+1 = a^2$, $pr+1 = b^2$, або $pq = (a-1)(a+1)$, $pr = (b-1)(b+1)$.

З першого рівняння очевидно, що або $\begin{cases} a-1=1, \\ a+1=pq, \end{cases}$ або одне з чисел $\{a-1; a+1\}$ дорівнює

p, а інше – q. У першому випадку маємо $pq=3$, чого для простих чисел бути не може. Тому $|p-q|=2$. Аналогічно з другого рівняння маємо $|p-r|=2$.

З останніх двох умов маємо такі випадки:

1) $p=q-2=r+2$; 2) $p=q+2=r-2$; 3) $q=r=p\pm 2$.

У перших двох випадках ми маємо три послідовних непарних числа, кожне з яких повинно бути простим. З подільності на 3, очевидно, що це повинні бути числа $3;\ 5;\ 7$. Трійки чисел $(5;\ 3;\ 7)$ і $(5;\ 7;\ 3)$ дійсно задовольняють умови задачі. Безпосередньою перевіркою – переконуємося, що вони задовольняють також вимогу, тобто $p+2qr+2=49=7^2$.

У третьому випадку розглянемо всі трійки простих чисел вигляду $(p;\ p-2;\ p-2)$ та $(p;\ p+2;\ p+2)$. Першим двом даним умовам вони задовольняють. Також зрозуміло, що в цих трійках не зустрічається просте число 2.

Нехай, спочатку $q=r=p-2$. Тоді $qr-p=q^2-q-2=m^2$, оскільки за умовою воно є точним квадратом. Тоді $m<q \Leftrightarrow m\le q-1$ і $q^2-q-2\le q^2-2q+1$, тобто $q\le 3$. Перевіркою впевнюємося, що значення $q=3$ підходить. Звідси маємо трійку простих чисел $(5;\ 3;\ 3)$, для якої $p+2qr+2=25=5^2$.

У випадку $q=r=p+2$ аналогічно маємо $q^2-q+2=m^2$, або $q\le -1$ – суперечність. Отже, всі випадки розглянуто.

8.8. На прямій зліва направо розташовані точки $A,\ D$ та C таким чином, що $CD=2AD$. Точка B задовольняє умови $\angle CAB=45^\circ$ та $\angle CDB=60^\circ$. Знайдіть градусну міру кута BCD.

(Герасимова Тетяна)

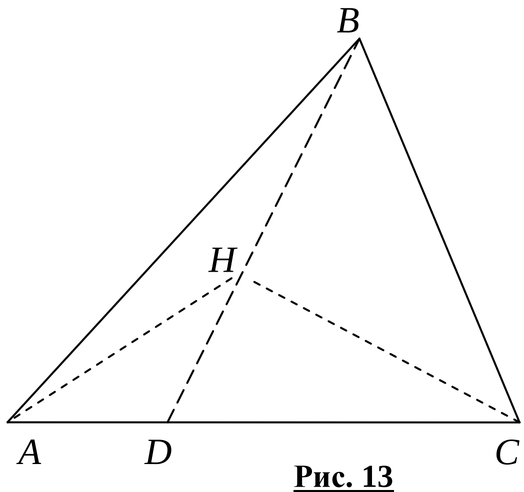


Рис. 13

Відповідь: $\angle BCD=75^\circ$.

Розв'язання. Проведемо перпендикуляр CH з точки C на відрізок BD (рис. 13), а також відрізок AH. Нехай $AD=x$, $CD=2x$. Тоді маємо $\angle DCH=30^\circ$, звідки $DH=x$ і ΔADH – рівнобедрений. Оскільки $\angle ADH=120^\circ$, то $\angle DAH=\angle AHD=30^\circ$. Тому $\angle HAB=15^\circ$. Крім того $\angle HBA=15^\circ$, тобто ΔABH – рівнобедрений, тому $AH=BH$. Оскільки $\angle HAC=30^0=\angle HCA$, то ΔAHC рівнобедрений, і $AH=CH$, тому ΔBHC також рівнобедрений і прямокутний, звідси

$$\angle DBC=\angle HBC=\angle HCB=45^\circ,$$

і остаточно маємо, що $\angle BCD=\angle DCH+\angle HCB=45^\circ+30^\circ=75^\circ$.

9 клас

9.5. Для яких натуральних n існують числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, що задовольняють умови:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n>0 \text{ та } a_1^3+a_2^3+\ldots+a_1^3<0.$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: для усіх $n\ge 3$.

***Розв'язання*.** Зрозуміло, що для $n=1$ таких чисел не існує.

Для $n=2$ маємо, що $a_1+a_2>0$. Якщо вони обидва додатні, то одразу маємо суперечність. Якщо $a_1>0>a_2=-b_2$, то для додатних чисел маємо нерівність: $a_1>b_2$, звідки $a_1^3>b_2^3=-a_2^3$, а тому й $a_1^3+a_2^3>0$.

Для $n=3$ такі числа існують. Наприклад, $a_1=-1,\ a_2=a_3=\frac{2}{3}$. Тоді $a_1+a_2+a_3=\frac{1}{3}>0$, а $a_1^3+a_2^3+a_1^3=-1+2\cdot\frac{8}{27}=-\frac{11}{27}<0$.

Для $n>3$ можна навести такий приклад: $a_1=-1,\ a_2=a_3=\frac{2}{3},\ a_4=\ldots=a_n=0$, який очевидно задовольняє умову.

Або більш змістовний приклад, який не містить нульових членів:

$a_1=-1,\ a_2=\ldots=a_n=\frac{1}{n-2}$. Для цього набору:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=-1+\frac{n-1}{n-2}=\frac{1}{n-2}>0.$$

$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=-1+(n-1)\cdot\frac{1}{(n-2)^3}=-1+\frac{(n-2)+1}{(n-2)^3}=-1+\frac{1}{(n-2)^2}+\frac{1}{(n-2)^3}<-1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}<0.$$

9.6. Місцевість розбита на квадрати, що утворюють великий квадрат 5×5. У деяких маленьких квадратах знаходяться міни (не більше однієї у квадраті), але у яких саме квадратах вони розташовані невідомо. У капітана групи саперів є план місцевості: квадрат 5×5, у комірках якого записані числа, що показують, скільки у відповідного квадрата місцевості сусідніх квадратів, у яких є міна (наявність міни у самому даному квадраті не враховується). Сусідніми вважаються квадрати, що мають спільну вершину чи сторону. Чи завжди зможе капітан визначити загальну кількість мін на всьому полі?

***Відповідь*:** не завжди.

***Розв'язання*.** Достатньо навести приклад розташувань різної кількості мін, при якому числа у кожній комірці будуть однаковими. Можливий приклад зображений на рис. 14.

*				*		**1**	**2**	**1**	**1**	**0**				*		
	*					**2**	**2**	**2**	**2**	**1**			*			
		*				**1**	**2**	**2**	**2**	**1**		*				*
			*			**1**	**2**	**2**	**2**	**2**					*	
*				*		**0**	**1**	**1**	**2**	**1**				*		

Рис. 14

9.7. Максим відгадує натуральне число n, про яке йому відомо, що воно має рівно 250 натуральних дільників $1=d_1<d_2<\ldots<d_{250}=n.$ За один хід Максим може вказати деякий індекс j, $1\le j\le 249$, та дізнатися значення d_j. При цьому йому заборонено дізнаватися d_j, якщо він вже знає d_{251-j}. За яку мінімальну кількість ходів Максим може гарантовано відгадати число n?

(Чорний М. та Carlo Pagano)

***Відповідь*:** За 2 ходи.

***Розв'язання*.** Доведемо, що при відомих d_{248} та d_{249} число відновлюється однозначно. Розглянемо два випадки:

1) d_{249} не ділиться на d_{248}. Тоді НСК $[d_{248}, d_{249}]$ буде дільником n, більшим за d_{249}. Звідси

$$n = d_{250} = [d_{248}, d_{249}].$$

2) d_{249} ділиться на d_{248}, тоді для деякого k справджується рівність $d_{249} = kd_{248}$. Тоді відповідно $d_3 = \frac{n}{d_{248}} = \frac{kn}{d_{249}} = kd_2 > k.$ Тоді $1 = d_1 < k < d_3$ теж є дільником n. З цього випливає, що $d_2 = k$, а тому $n = d_2 d_{249} = kd_{249}$.

Залишається показати, що одного ходу не досить. Припустимо протилежне - що дізнавшись єдиний дільник d_K при фіксованому K, можна однозначно визначити n.

Розглянемо прості числа $q > p > 2$ та число pq^{124} з 250 дільниками. Тоді дільники впорядковані за зростанням таким чином:

$$1 < p < q < pq < q^2 < \ldots < pq^k < q^{k+1} < \ldots < q^{124} < pq^{124}.$$

Звідси K має бути парним, інакше, дізнавшись значення непарного за номером дільника, Максим отримає деяке число q^k і не матиме жодної інформації про p, крім того, що воно менше за q. За вказаних умов це не дасть Феді можливості відрізнити pq^{124} від $2q^{124}$.

Тепер розглянемо прості числа $p < q < r,$ де $r < p^2$, та число $p^{124}q$ з 250 дільниками. В цьому випадку впорядкування виглядає таким чином:

$$1 < p < q < p^2 < pq < p^3 < \ldots < p^{122}q < p^{124} < p^{123}q < p^{124}q.$$

Тоді, щоб отримати інформацію про q та відрізнити це число від $p^{124}r$, Максимові треба обов'язково назвати непарний індекс K. Таким чином, K повинно бути парним і непарним одночасно – суперечність.

9.8. Гострокутний трикутник ABC вписаний у коло w_1, AN та CK його висоти, H – ортоцентр. Коло w_2, що описане навколо ΔNBK, вдруге перетинає коло w_1 у точці P. Прямі CA та BP перетинаються у точці S. Пряма SH вдруге перетинає коло w_2 у точці Q. Доведіть, що прямі NQ, PK та CA перетинаються в одній точці, або є паралельними.

(Нагель Ігор)

<u>Розв'язання</u>. При доведенні будемо впиратися на відому теорему.

<u>Теорема</u>. Радикальні осі трьох кіл перетинаються в одній точці або є паралельними.

Точки A, K, N, C лежать на одному колі, позначимо його w_3 (рис. 15). Тоді радикальною віссю кіл w_1 та w_3 є пряма AC, w_1 та w_2 – пряма BP, w_2 та w_3 –пряма NK. Тоді точки N, K, S лежать на одній прямій.

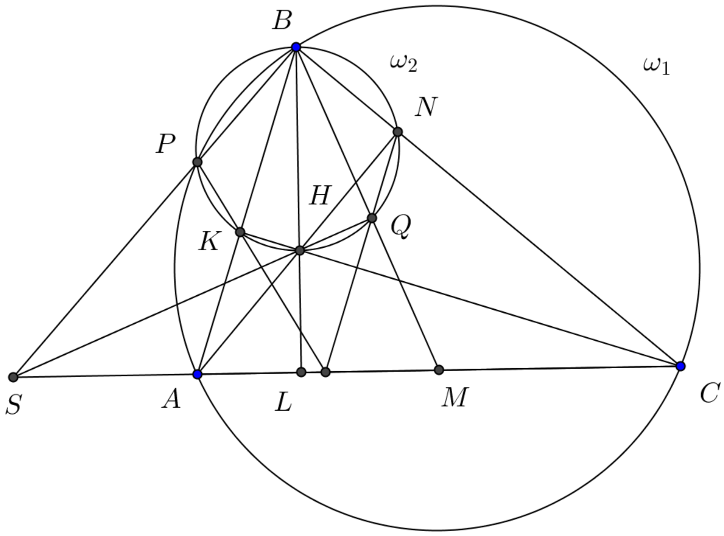


рис. 15

Розташування точок може бути різним, тому далі ми будемо використовувати орієнтовані кути, щоб не розглядати окремі випадки. Помітимо, що $\angle(AK,\ KS) = \angle(AK,\ KN)$. Оскільки точки $A,\ K,\ N,\ C$ лежать на одному колі, то

$$\angle(AK,\ KN) = \angle(AC,\ CN) = \angle(AC,\ CB).$$

Точки $A,\ C,\ B,\ P$ теж лежать на одному колі, тому

$$\angle(AC,\ CB) = \angle(AP,\ PB) = \angle(AP,\ PS).$$

Таким чином ми отримали, що $\angle(AK,\ KS) = \angle(AP,\ PS)$, звідки точки $A,\ K,\ S,\ P$ теж лежать на одному колі w_4.

Продовжимо BQ до перетину з AC у точці M. У колі w_2 BH – діаметр, тобто $SQ \perp BM$. Позначимо через L – точку перетину BH з AC. Тоді $\angle SQB = \angle BLS = 90°$, тобто точки $B,\ Q,\ S,\ L$ належать одному колу. Звідси $\angle(LS,\ SQ) = \angle(LB,\ BQ)$, звідки випливає, що $\angle(MS,\ SQ) = \angle(HB,\ BQ)$. З іншого боку

$$\angle(HB,\ BQ) = \angle(HN,\ NQ) = \angle(AN,\ NQ), \text{ а } \angle(MS,\ SQ) = \angle(AS,\ SQ).$$

Ми отримали рівність $\angle(AN,\ NQ) = \angle(AS,\ SQ)$ з якої випливає, що точки $A,\ Q,\ S,\ N$ лежать на одному колі w_5.

Тому радикальною віссю кіл w_4 та w_5 є пряма AS, w_4 та w_2 – пряма KP, w_2 та w_5 – пряма QN. Звідси й випливає, що прямі $NQ,\ PK$ та CA перетинаються в одній точці, або є паралельними.

10 клас

10.5. Скільки існує трицифрових натуральних чисел, які не мають нульових цифр у своєму записі та задовольняють умову: при будь-якій перестановці цифр цього числа воно залишається таким, що не ділиться на 4?

(Рубльов Богдан)

<u>Відповідь:</u> 283.

<u>Розв'язання</u>. Розглянемо кількість непарних цифр цього числа.

Нехай усі три цифри непарні, тоді усі такі числа умову задовольняють. Таких чисел $5^3 = 125$.

Нехай у числі одна парна цифра та дві непарні. Тоді парна цифра не може бути 2 чи 6, бо число $\overline{ab2}$ чи $\overline{ab6}$ ділиться на 4 при непарному числі b. Дійсно, $b = 2c+1$, тому

$$\overline{b2} = 10(2c+1) + 2 = 20c + 12 \ \vdots\ 4.$$

Аналогічно для числа $\overline{b6}$.

Таким чином парною може бути цифра 4 або 8 і кожне таке число умову задовольняє, бо

$$\overline{b4} = 10(2c+1) + 4 = 20c + 14 \ \not\vdots\ 4.$$

Аналогічно для числа $\overline{b8}$.

Таких чисел усього $3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 150$.

Нехай у числі одна непарна цифра та дві парні. Тоді парна цифра не може бути 2 чи 6, що випливає з попереднього пункту. Але тоді парні цифри повинні бути 4 або 8, і ці дві цифри наприкінці числа дають число, що кратне 4. Тому таких чисел для цього випадку не існує.

Якщо усі три цифри парні, то серед них не може бути цифр 4 або 8, бо тоді число $\overline{b4}$ та $\overline{b8}$ при парній цифрі b кратне 4. Тому цифри можуть бути 2 чи 6, і кожне таке число умову задовольняє. Таких чисел $2^3 = 8$.

Загалом маємо $125+150+8=283$.

10.6. Знайдіть найменше дійсне значення параметра C, при якому нерівність

$$\cos a+\cos b+3\cos a\cos b\le 2\cos^2 a+\cos^2 b+C$$

виконується при всіх $0\le a\le b\le \frac{\pi}{2}$.

(Голоднов Кирило)

<u>Відповідь</u>: $C=2$.

<u>Розв'язання.</u> При $a=b=0$ одержимо нерівність $5\le 3+C$, звідки $C\ge 2$.
Доведемо, що $C=2$ – шукане мінімальне значення.
Для цього треба довести нерівність

$$\cos a+\cos b+3\cos a\cos b\le 2\cos^2 a+\cos^2 b+2 \qquad \textbf{(1)}$$

Зробимо заміну $\sqrt{x}=\cos a$ та $\sqrt{y}=\cos b$, тоді $0\le y\le x\le 1$. Нерівність **(1)** зводиться до такої нерівності: довести, що якщо $0\le y\le x\le 1$, то справджується нерівність:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+3\sqrt{xy}\le 2x+y+2.$$

Останню нерівність можна перепишемо таким чином:

$$(2-\sqrt{x}-\sqrt{y})+(x+y-2\sqrt{xy})+\left(\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})\right)\ge 0.$$

Усі три дужки невід'ємні. Перша дужка невід'ємна, оскільки $x\le 1$ та $y\le 1$, друга – з нерівності між середніми, третя – за умовою. Нерівність доведено.

10.7. Назвемо натуральне число ***солідарним***, якщо воно є взаємно простим із сумою усіх своїх натуральних дільників.

а) Яка найбільша кількість солідарних чисел може йти поспіль?

б) Яка найбільша кількість солідарних чисел може йти поспіль, якщо число 1 солідарним не вважати?

(Веклич Богдан)

<u>Відповідь</u>: ***а)*** та ***б)*** – 5 чисел.

<u>Розв'язання.</u> Спочатку покажемо, що парне число солідарне, якщо воно є точним квадратом або подвоєним точним квадратом.

Подамо довільне парне число у вигляді $m=2^a b$ де b – непарне число. Зрозуміло, що усі непарні дільники чисел m та b співпадають. Якщо число b не є точним квадратом, то усі його дільники можна розбити на такі пари $d<\sqrt{b}$ та $\frac{b}{d}>\sqrt{b}$, при цьому сума у кожній парі – парна. Звідси випливає, що й сума усіх дільників числа m – парна і не є взаємно простою з числом m.
Таким чином число може бути солідарним (але не обов'язково буде) лише при умові, що b є точним квадратом. Але це означає, що число $m=2^a b$ в залежності від парності параметру a воно є квадратом або подвоєним квадратом натурального числа.
Якби існувало 6 поспіль солідарних чисел, то 3 з них були б парними, тому або два з них є повними квадратами, або два з них є подвоєними квадратами. Тобто виконується одна з чотирьох умов: $x^2-y^2=2$ або $x^2-y^2=4$, або $2x^2-2y^2=2$, або $2x^2-2y^2=4$, кожна з яких не має розв'язків в натуральних числах. Наприклад, для рівняння $x^2-y^2=4$ маємо такі оцінки: зрозуміло, що $x>y$, тому

$$4=x^2-y^2=(x-y)(x+y)\ge 2y+1 \Rightarrow y\le \tfrac{3}{2} \Rightarrow y=1.$$

Такий саме висновок має для інших рівнянь, але тоді маємо, що $x^2 = 3$ або $x^2 = 5$, або $x^2 = 2$, або $x^2 = 3$ відповідно. Жодне з них розв'язків немає.

Залишається показати, що 5 солідарних чисел поспіль існують.

а) Числа $1, 2, 3, 4$ та 5 є шуканими, в чому легко переконатись простою перевіркою.

б) У цьому пункті приклад не є таким очевидним. Пошук робиться дуже просто, треба брати квадрати парних чисел, а далі перевіряти, чи не є числа на 2 більше та менше цього квадрату подвоєними квадратами. Першими подібними числами до перевірки є 15, 16, 17, 18 та 19, але, на жаль, якщо підрахувати дільники числа 15, то маємо, що їх сума складає $1+3+5+15=24$ – не є взаємно простим з 15. Тобто 15 не є солідарним, тому наведена п'ятірка не задовольняє умови.

Розглянемо тепер такі числа: $575, 576, 577, 578$ та 579. Проведемо перевірку, що вони є солідарними (зрозуміло, що при перевірці солідарності в сумі дільників можна не враховувати саме число).

$575 = 5^2 \cdot 23$ тоді $1+5+23+25+115=169$ – солідарне, оскільки не ділиться ні на 5, ні на 23.

$576 = 2^6 \cdot 3^2$, тоді $1+2+3+4+6+8+9+12+16+18+24+32+36+48+64+72+$ $+96+144+192+288=1075$ – солідарне, оскільки не ділиться ні на 2, ні на 3.

577 – просте число, тому воно солідарне.

$578 = 5^2 \cdot 23$, тоді $1+2+17+34+289=343=7^3$ – солідарне, оскільки не ділиться ні на 2, ні на 17.

$579 = 3 \cdot 193$, тоді $1+3+193=197$ –солідарне, оскільки це просте число.

10.8. Вписане коло трикутника ABC дотикається його сторін AB, BC і AC в точках N, K, P відповідно. Відомо, що $AB > BC$ і бісектриси кутів A і C перетинають пряму NK в точках Q і T відповідно. Позначимо через S – точку перетину прямих AQ і TP, а через F – точку перетину прямих CT і PQ. Доведіть, що прямі NK, SF і AC перетинаються в одній точці.

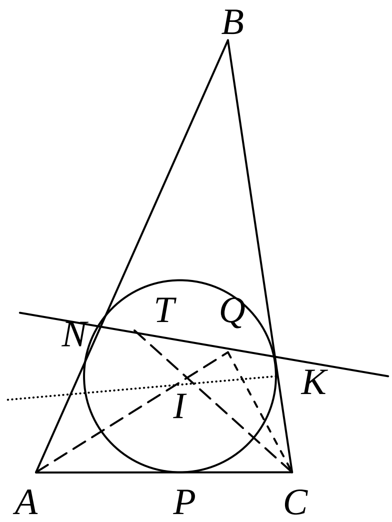
(Нагель Ігор)

<u>Розв'язання</u>. Спочатку доведемо, що $\angle AQC = 90°$. Дійсно, за теоремою про зовнішній кут трикутника, маємо (рис. 16):

$$\angle NQA = \angle BNK - \angle NAQ = (90° - \tfrac{1}{2}\angle B) - \tfrac{1}{2}\angle A = \tfrac{1}{2}\angle C.$$

Тому, $\angle TQI = \angle KCI = \frac{1}{2}\angle C$. Звідси випливає, що точки I, Q, K, C лежать на одному колі. Оскільки радіус, проведений в точку дотику, перпендикулярний до дотичної, то $\angle IKC = 90°$. Тому за теоремою про вписані кути, які спираються на одну й ту ж саму дугу кола, маємо: $\angle AQC = \angle IQC = \angle IKC = 90°$, що і треба було довести. Аналогічно доводиться, що $\angle CTA = 90°$.

З'єднаємо точки P та I, тоді $IP \perp AC$. Звідси випливає, що чотирикутники $ATIP$, $CQIP$ і $ATQC$ – вписані. Тому,



<u>Рис. 16</u>

$$\angle PTI = \angle PAI = \angle CAQ = \angle CTQ = \angle ITQ,$$

тобто TI – бісектриса кута PTQ (рис. 17). Аналогічно доводиться, що QI – бісектриса кута PQT. Отже, I – точка перетину бісектрис трикутника TPQ і PI – бісектриса кута TPQ. Оскільки $AB > BC$, то промені NK і AC перетинаються в деякій точці R. При цьому, промінь PC – бісектриса зовнішнього кута при вершині P в трикутнику TPQ. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника і бісектриси зовнішнього кута трикутника, маємо:

$$\frac{PS}{ST}=\frac{PQ}{QT},\ \frac{TR}{RQ}=\frac{PT}{PQ}\ \text{і}\ \frac{QF}{FP}=\frac{QT}{TP}.$$

Перемножуючи усі ці три рівності, одержуємо:

$$\frac{PS}{ST}\cdot\frac{TR}{RQ}\cdot\frac{QF}{FP}=\frac{PQ}{QT}\cdot\frac{TP}{PQ}\cdot\frac{QT}{TP}=1,$$

а це означає, що точки S, F і R лежать на одній прямій (за теоремою Менелая), що і треба було довести.

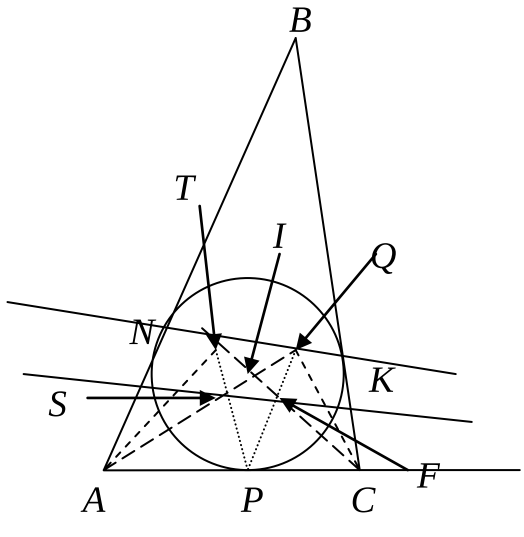


Рис. 17

11 клас

11.5. На горизонтальній прямій n зліва направо розташовані точки $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Відстань між кожними двома сусідніми точками дорівнює 1. Побудуємо пряму l, яка перпендикулярна n і проходить через точку A_5. Чи існує на цій прямій l принаймні одна така точка $B \neq A_5$, що серед усіх трикутників BA_iA_j, $1 \le i < j \le 9$, кількість гострокутних та тупокутних однакова?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: існує.

***Розв'язання*.** Проведемо півколо з діаметром A_1A_8 (рис. 18). Покажемо, що шукана точка B – це перетин цього півкола та прямої l.

Підрахуємо кількість тупокутних трикутників BA_iA_j, $1 \le i < j \le 9$: з точок $A_1, \ldots, A_4$ можна вибрати будь-які дві, так само і з точками $A_6, \ldots, A_9$. Таки трикутників по 6, разом – 12 трикутників. Якщо вибрати точки по різні боки від A_5, то тут тупокутний один – BA_1A_9, бо коло з діаметром A_1A_9 містить всередині точку B.

Тепер гострокутних трикутників. Вибираємо одну з точок $A_1, \ldots, A_4$, другу – з $A_6, \ldots, A_9$, усього – 16 трикутників. З них – тупокутний BA_1A_9, а також два прямокутних – BA_1A_8 та BA_2A_9. Таким чином їх також рівно 13. Тобто точка B – шукана.

11.6. Для яких натуральних чисел N існують такі натуральні числа x, y, що їх сума дорівнює N, а добуток ділиться на N?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: якщо існує просте число p, для якого $N \vdots p^2$.

***Розв'язання*.** Спочатку покажемо, що усі такі числа умову задовольняють, тобто підберемо

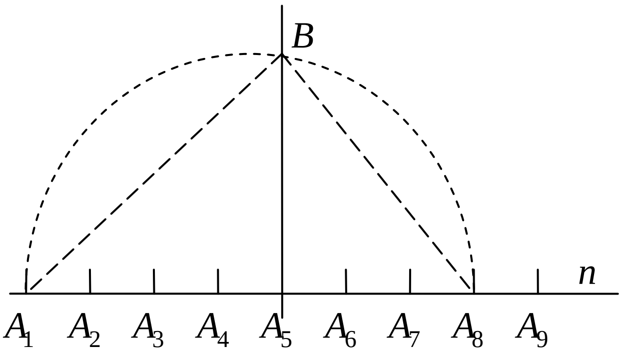


Рис. 18

для них шукану пару $x,\ y$.

Нехай для деякого простого p $N = p^2Q$, де $Q \geq 1$. Розглянемо $x = pQ$, $y = p^2Q - pQ$. Тоді

$$x + y = N = p^2Q,\ xy = pQ(p^2Q - pQ) = p^2Q(pQ - Q) \vdots N = p^2Q.$$

Нехай тепер $N = p_1p_2...p_l$, де $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_l$ – попарно різні прості числа. Тоді $y = N - x$. Припустимо, що $xy = x(N - x) = Nk$, де $k \geq 1$. Тоді $x^2 = N(x - k)$. Звідси випливає, що $\forall i = \overline{1, l}$ $x^2 \vdots p_i$, а оскільки p_i – просте число, то й $x \vdots p_i$. Тому $x \vdots p_1p_2...p_l = N$, звідки $x \geq N$, що суперечить умові $y \in N$.

11.7. Вписане коло гострокутного трикутника ABC дотикається до сторін BA та AC у точках K та L відповідно. Висота AH перетинає бісектриси кутів B та C у точках P та Q відповідно. Описані кола трикутників KPB та LQC позначимо через w_1 та w_2. Доведіть, що, якщо середина висоти AH лежить зовні кіл w_1 та w_2, то дотичні до кіл w_1 та w_2, що проведені з цієї середини, є рівними.

(Хілько Данило)

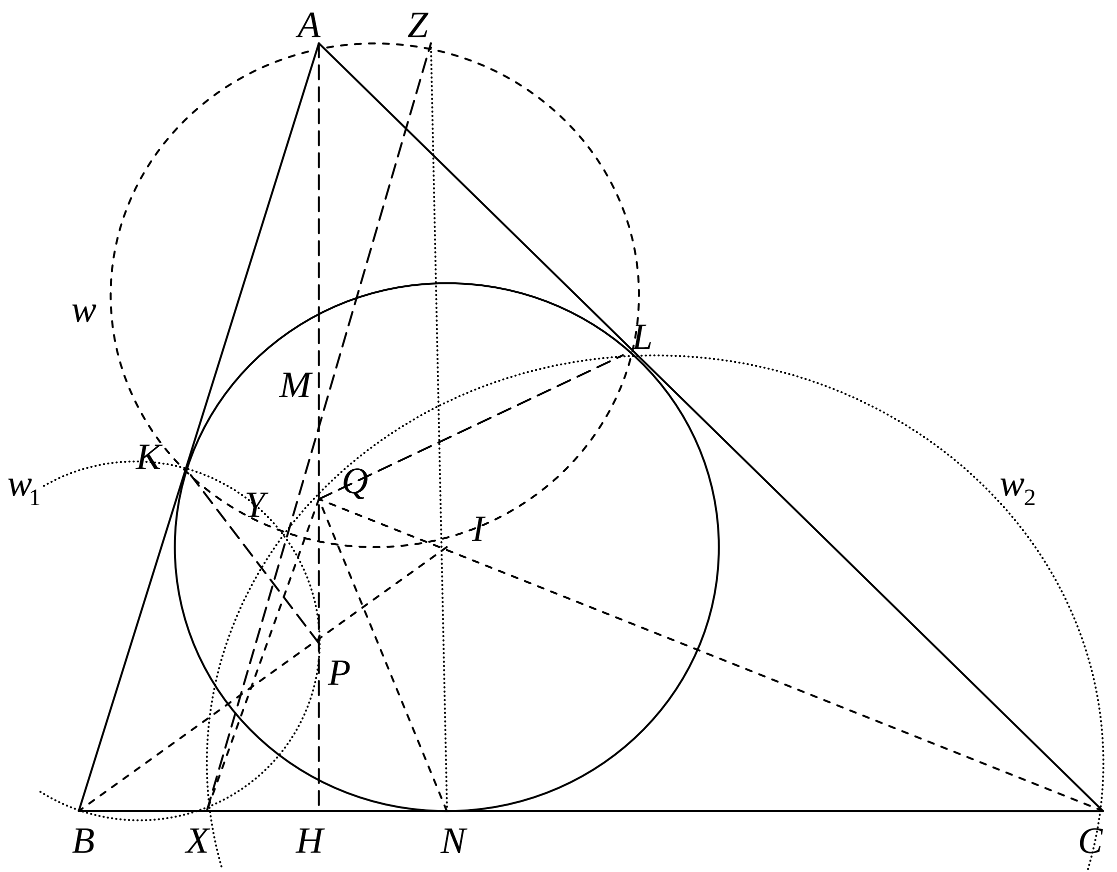


Рис. 19

Розв'язання. Позначимо через N – точку дотику вписаного в ΔABC кола до сторони BC, а через I – інцентр ΔABC (рис. 19). Крім того, нехай X точка, що симетрична N відносно точки H.

Оскільки CQ- бісектриса кута NCL, а $CN = CL$, то трикутники QLC та QNC є рівними, звідки $\angle QLC = \angle QNC$. Крім того $\angle QNX = \angle QXN$. Звідси отримаємо, що $\angle QXC + \angle QLC = 180^0$.

Звідси випливає, що $X \in w_2$. Аналогічно $X \in w_1$, тобто точка X є спільною точкою кіл. w_1 та w_2. Позначимо через Y другу точку перетину w_1 та w_2. Тоді, оскільки чотирикутники $BKYX$ та $CLYX$ – вписані, то

$\angle KYX + \angle XYL = 180° - \angle B + 180° - \angle C = 180° + \angle A$, звідки $\angle KLY = 180° - \angle A$.

Тому точки A, K, Y, L циклічні. Позначимо це коло w. Другу точку перетину w та прямої XY позначимо Z. Тоді маємо, що $\angle ZAK = \angle KYX = 180° - \angle B$, звідки $AZ \parallel BC$. Крім того

$$\angle AKI = \angle ALI = 90°,$$

звідки отримуємо, що AI -- діаметр кола, описаного навколо $\triangle AKL$. Тоді $\angle AZI = 90^0$.

Оскільки $IN \perp BC$ та $ZI \perp BC$, то Z, I, N лежать на одній прямій, тому $AZNH$ – прямокутник. Оскільки $XH = NH$, то $AZHX$ - паралелограм. Позначимо точку перетину прямої XZ та висоти AH через M. Тоді M є серединою висоти. Тоді середина висоті належить прямій XY, яка є радикальною віссю кіл w_1 та w_2. Томі дотичні, що проведені з точки M до цих кіл – рівні.

11.8. Нехай A – скінченна множина функцій, що визначені на множені дійсних чисел і приймають дійсні значення. Також відомо, що для будь-яких функцій f, g, які належать A, функція $f(g(x))$ теж належить A. Відомо, що для довільної функції f з множини A існує функція g з A така, що

$$f(f(x)+y) = 2x + g(g(y)-x).$$

Доведіть, що функція $h(x) = x$ належить A.

(Клурман Олексій)

***<u>Розв'язання</u>*.** Доведемо таку лему:

<u>Лема</u>. У множині A існує функція f, для якої справджується рівність: $f(f(x)) = f(x)$.

Доведення леми. Позначимо через $f^{(k)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))$. Зафіксуємо $f \in A$, а далі розглянемо послідовність $f = f^{(1)},\ f^{(2)},\ f^{(4)},\ f^{(8)}$, ..., оскільки A – скінченна, то з певного моменту ця послідовність починає повторюватись з деякого номера. Тому $f^{(2^t)} = f^{(2^s)}$ для деяких натуральних $t > s \geq 1$. Тоді $f^{(2^t)} = \left(f^{(2^s)}\right)^{(2^{t-s})} = f^{(2^s)}$, тепер покладемо $f_1 = f^{(2^s)},\ k = 2^{t-s}$, звідки маємо, що $f_1^{(k)} = f_1$. Тепер подіємо зліва на цю рівність $f_1^{(k-2)}$ і будемо мати, що $f_1^{(k-2)} \circ f_1^{(k)} = f_1^{(k-2)} \circ f_1$ або $\left(f_1^{(k-1)}\right)^{(2)} = f_1^{(k-1)}$. Тому, якщо покласти $g = f_1^{(k-1)}$, будемо мати, що $g^{(2)}(x) = g(g(x)) = g(x)$, що й треба було довести.

Лема доведена.

Покажемо тепер, що ця функція f, для якої $f(f(x)) = f(x)$, є сюр'єктивною, звідки буде випливати, що $f(t) = t$. Дійсно, оскільки $f(x)$ приймає усі значення, то покладемо $t = f(x)$. Покладемо у задане рівняння $y = -f(x)$, тоді

$$f(0) - 2x = g(g(-f(x)) - x).$$

Звідси g – сюр'єкція. Якщо тепер у початковому рівнянні зафіксувати x, то права частина, з сюр'єктивності $g(x)$, приймає всі дійсні значення, тому f – сюр'єкція